

Adı Soyadı :

Nosu:

17.11.2025

Sayılar Teorisi I Cevap Anahtarı (Vize)

1- Aralarında $\frac{1}{4}$ fark olan iki sayının kareleri farkı $\frac{1}{4}$ ile bölünebilir ve bu fark sayıların toplamının $\frac{1}{4}$ katıdır, gösteriniz.

2- $1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1)$ toplamının 47 ile bölünebilmesi için n en az kaç olmalıdır?

3- Bir mağaza banesi 41 tl ve 53 tl olan iki çeşit oyuncaktan toplam 3780 tl'lik ismarlıyor, her birinden kaç tane ismarlamıştır.

4- $\frac{2019^p - 27^p}{p}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan kaç p asal tam sayısı vardır.

5- $x^3 + x + 5 \equiv 0 \pmod{7^3}$ polinom kongrüansının bir çözümünü bulunuz. ($x^3 + x + 5 \equiv 0 \pmod{7}$ için mutlak değerce en küçük tam sayı çözüm olarak alınacak)

Sorular eşit puanlıdır.

$$\begin{aligned} 1- a=n \quad b=n+3 \text{ olsun. } b^2 - a^2 &= (n+3)^2 - n^2 = (n+3-n)(n+3+n) \\ &= 3.(2n+3) \\ &= 3(n+n+3) = 3(a+b) \end{aligned}$$

$$2- 1.2 + 2.3 + \dots + n.(n+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + k = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$$

$$n+2=47 \quad n=45 \text{ olmalıdır.}$$

$$3-) 53 = 1 \cdot 41 + 12$$

$$41 = 3 \cdot 12 + 5$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$41x + 53y = 3780$$

$$1 = -17 \cdot 53 + 22 \cdot 41 \text{ bulunur.}$$

$$3780 = -64260 \cdot 53 + 83160 \cdot 41$$

$$x = 83.160 + 53t$$

$$x > 0, y > 0$$

$$y = -64260 - 41t$$

$$\text{olacağından}$$

$$t > \frac{-83160}{53}$$

$$t < \frac{-64260}{41}$$

$$t = -1568 \text{ bulunur}$$

$$x = 56 \quad y = 28 \text{ elde edilir.}$$

$$4-) \frac{2019^p - 27^p}{p}$$

$$p=2 \text{ ve } p=3 \text{ olacağı asıkar}$$

$$\text{başka var mıdır. } p \nmid a \text{ için } a^p \equiv a \pmod{p} \text{ (Fermat)}$$

$$2019^p \equiv 2019 \pmod{p} \text{ ve } 27^p \equiv 27 \pmod{p}$$

$$2019^p - 27^p \equiv 2019 - 27 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 1992 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83 \text{ olup } p=83 \text{ bulunur. O halde}$$

$$p=2, 3, 83 \text{ olabilir.}$$

$$5-) f(1) \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7} \text{ olup } b=1 \text{ alınabilir.}$$

$$f(1) = 7 \quad f'(1) = 4 \quad 4k \equiv \frac{-7}{7} \pmod{7} \quad k \equiv -2 \pmod{7}$$

$$x = 1 - 2 \cdot 7 \equiv -13 \equiv 36 \pmod{49} \text{ bulunur.}$$

$$b = 36 \quad f(36) = 46697 \quad f'(36) = 3889$$

$$3889k \equiv \frac{-46697}{49} \equiv -953 \pmod{7} \quad k \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x = 36 + 5 \cdot 49 \equiv 281 \pmod{7^3} \text{ bulunur.}$$