Adı Soyadı: 25.01.2024
Numarası:

2023-2024 SOYUT MATEMATİK I DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) a)(10p) J indis kümesi olmak üzere, B_j bir küme ailesi olsun.

$$\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)' = \bigcup_{j\in J} B_j{}'$$

olduğunu gösteriniz.

b)(15p) Dört elemanlı $\{k, l, m, n\}$ kümesi üzerindeki tüm ayrışımları bulunuz.

2) a)(15p) R bağıntısı $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ üzerinde

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow 5|(a-c)+(b-d)$$

ile tanımlanıyor. R denklik bağıntısı olur mu? Gösteriniz.

b)(20p) $C=\{x,y,z,t,a,b,c,d\}$ ve C üzerinde bir

$$\beta = \left\{\begin{matrix}(x,x),(y,y),(z,z),(t,t),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(x,y),(x,t),(x,c),(x,d),(y,t),\\ (t,c),(a,b),(a,d),(b,d),(c,d),(y,c),(t,d),\ (y,d)\end{matrix}\right\}$$

bağıntısı veriliyor. Bu durumda *Mak C, Min C, EBEC, EKEC* ifadelerini bulunuz. C kümesi β bağıntısı ile tam sıralı küme olur mu? Açıklayınız. C' nin en az 3 elemanlı 3 tane zincirini bulunuz.

3) (20p) $h:\mathbb{R}-\{\frac{7}{4}\}\to\mathbb{R}-\{\frac{5}{4}\}$ ve $u:\mathbb{R}-\{\frac{5}{4}\}\to\mathbb{R}-\{\frac{7}{4}\}$ iki fonksiyon olmak üzere $(h^\circ u)^{-1}=u^{-1\circ}h^{-1}$ olduğunu gösteriniz ve $h(x)=\frac{5x+3}{4x-7}$ ve $u(x)=\frac{7x+3}{4x-5}$ fonksiyonları birbirlerinin tersi olur mu? Araştırınız.

4) $\mathbb{N}^*$ kümesinde Δ işlemi $a\Delta b=a^b$ ile tanımlanıyor.

a) (8p)Δ bir ikili işlem olur mu?

b) (12p)Δ işleminin işlem özelliklerini(birleşme, değişme, birim eleman, ters eleman) inceleyiniz.

Başarılar
Dr. Çağla Çelemoğlu

Cevap Anahtarı

1) a) Keyfi bir $x\in\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)'$ alalım.

$x\in\left(\bigcap B_j\right)' \Leftrightarrow x\notin\bigcap_{j\in J} B_j$

$\Leftrightarrow \exists j\in J$ için $x\notin B_j$,

$\Leftrightarrow \exists j\in J$ için $x\in B_j{}'$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{j\in J} B_j{}'$

olup x keyfi old eşitlik sağlanır

1 b)

Tek elemanlı ayrışım $\{\{k,l,m,n\}\}$

İki elemanlı ayrışımlar $\{\{k,l\},\{m,n\}\}$

$\{\{k,m\},\{l,n\}\}$

$\{\{k,n\},\{l,m\}\}$

$\{\{k\},\{l,m,n\}\}$

$\{\{l\},\{k,m,n\}\}$

$\{\{m\},\{k,l,n\}\}$

$\{\{n\},\{k,l,m\}\}$

Üç elemanlı ayrışımlar $\{\{k\},\{l\},\{m,n\}\}$

$\{\{k\},\{m\},\{l,n\}\}$

$\{\{k\},\{n\},\{l,m\}\}$

$\{\{l\},\{m\},\{k,n\}\}$

$\{\{l\},\{n\},\{k,m\}\}$

$\{\{m\},\{n\},\{k,l\}\}$

Dört elemanlı ayrışım $\{\{k\},\{l\},\{m\},\{n\}\}$

Toplam 15 tanedir

2 a) R denklik bağıntısı olur mu?

$(a,b) \, R \, (c,d) \iff 5 \mid (a-c)+(b-d)$

ile tanımlanıyor.

Yansıma: $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ için $(a,b)R(a,b)$ olur mu? Yani

$5 \mid (a-a)+(b-b)$ olur mu?

$5 \mid 0$ ve $5 \mid 0+0 \Rightarrow 5 \mid (a-a)+(b-b)$ olur Yani

$(a,b) \, R \, (a,b)$ olup yansıma sağlanır

Simetri: $(a,b)R(c,d)$ iken $(c,d)R(a,b)$ olur mu?

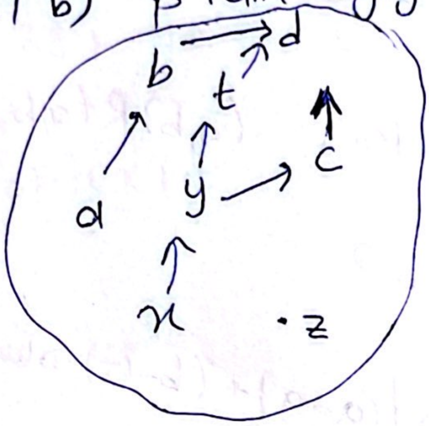
$$(a,b)R(c,d) \Rightarrow 5 \mid (a-c)+(b-d)$$
$$\Rightarrow 5 \mid (a+b)-(c+d)$$
$$\Rightarrow 5 \mid (c+d)-(a+b)$$
$$\Rightarrow 5 \mid (c-a)+(d-b)$$
$$\Rightarrow (c,d)R(a,b) \text{ olup simetri sağlar}$$

Geçişme: $(a,b) \, R \, (c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$ iken $(a,b) \, R \, (e,f)$ olur mu?

$$(a,b) R (c,d) \Rightarrow 5 \mid (a-c)+(b-d)$$
$$(c,d) R (e,f) \Rightarrow 5 \mid (c-e)+(d-f)$$
$$\Rightarrow 5 \mid (a-c)+(c-e)+(b-d)+(d-f)$$
$$\Rightarrow 5 \mid (a-e)+(b-f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

olup geçişme sağlanır Yani R denklik bağıntısıdır.

2) b) β için diyagram çizecek olursak aş. gibi elde edilir:



Buradan Mak $C = \{d, z\}$

Min $C = \{a, x, z\}$

EBE yoktur

EKE yoktur.

C kümesi bu bağıntı ile tam sıralı olmaz. Çünkü örneğin a ile x, a ile z ya da z ile c karşılaştırılamaz.

Zincirler

$Z_1 = \{a, b, d\}$, $Z_2 = \{x, y, t\}$

$Z_3 = \{x, y, c, d\}$

3) $(h\circ u)^{-1} = u^{-1}\circ h^{-1}$ old. göstermek için hem $(h\circ u)\circ(u^{-1}\circ h^{-1}) = i$ hem de $(u^{-1}\circ h^{-1})\circ(h\circ u) = i$ old. göstermeliyiz.

$\forall x \in$ $\quad (h\circ u)\circ(u^{-1}\circ h^{-1}) = h\circ(u\circ u^{-1})\circ h^{-1}$

$= (h\circ i)\circ h^{-1}$

$= h\circ h^{-1} = i$. Benzer şekilde

$(u^{-1}\circ h^{-1})\circ(h\circ u) = u^{-1}\circ(h^{-1}\circ h)\circ u$

$= (u^{-1}\circ i)\circ u$

$= u^{-1}\circ u = i$

$h = \dfrac{5x+3}{4x-7}$ $\quad u = \dfrac{7x+3}{4x-5}$ için birbirlerinin tersi olur mu

Yani $h\circ u = i$ ve $u\circ h = i$ old. gösterelim

$\forall x \in$ için $(h\circ u)(x) = h(u(x)) = h\left(\dfrac{7x+3}{4x-5}\right)$

$= \dfrac{5.\left(\dfrac{7x+3}{4x-5}\right)+3}{4.\left(\dfrac{7x+3}{4x-5}\right)-7}$

$$= \frac{35x+15+12x-15}{28x+12-28x+35} = \frac{47x}{47} = x = i(x)$$ olur ve

$$(u\circ h)(x) = u(h(x)) = u\left(\frac{5x+3}{4x-7}\right) = \frac{7\cdot\left(\frac{5x+3}{4x-7}\right)+3}{4\cdot\left(\frac{5x+3}{4x-7}\right)-5}$$

$$= \frac{35x+21+12x-21}{20x+12-20x+35}$$

$$= \frac{47x}{47} = x = i(x)$$

Yani u ve h birbirlerinin tersidir.

4) a) $\Delta : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ $\qquad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$(a,b) \rightarrow a\Delta b = a^b$

Kapalılık: $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ için $a\Delta b \in \mathbb{N}^*$ olur mu?

$a \in \mathbb{N}^*$ ve $b \in \mathbb{N}^*$ olup $a^b \in \mathbb{N}^*$ olur. Kapalılık sağlanır

İyi tanımlılık: $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ için

$(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c \wedge b = d$

$\Rightarrow a^b = c^d$

$\Rightarrow a\Delta b = c\Delta d$ olup iyi tanımlılık sağlanır. Yani "Δ" ikili işlemdir.

b) Birleşme öz: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}^*$ için

$(a\Delta b)\Delta c = (a^b)\Delta c = (a^b)^c = a^{bc}$

$a\Delta(b\Delta c) = a\Delta b^c = (a)^{b^c}$ $\Big\} \neq$

birleşme öz yoktur

Değişme öz: $\forall a,b \in \mathbb{N}^*$ için

$a\Delta b = a^b \neq b^a$ old. $a\Delta b \neq b\Delta a$ yani değişme öz yoktur

Birim eleman öz: $\forall a \in \mathbb{N}^*$ için $a\Delta e = a$ ve $e\Delta a = a$

olacak şekilde $e \in \mathbb{N}^*$ var mı? $a\Delta e = a^e = a \Rightarrow e = 1 \in \mathbb{N}^*$ (sol birim vardır;

$e\Delta a = e^a = a$ olacak şekilde $e \in \mathbb{N}^*$ yoktur

(sağ birim yoktur) O halde birim eleman öz yoktur

Ters eleman oz:
Birim eleman olmadığından, ters eleman aranmaz.
Çünkü $\forall a \in \mathbb{N}^*$ için $\left.\begin{array}{l} a \triangle a^{-1} = e \\ a^{-1} \triangle a = e \end{array}\right\}$ eş $\exists a^{-1} \in \mathbb{N}^*$ olmalıdır