Ad- Soyad: **31.03.2018**

Numara :

İmza :

SOYUT MATEMATİK II ARA SINAV SORULARI

1) Kafes, ilgililik, aritmetik birim, ardıllı küme ve aralarında asal sayı kavramlarını tanımlayıp birer örnek veriniz.

2) $m, n, p \in \mathbb{N}$ olsun.

$$n < m \Rightarrow (n+p)m < m^2 + pm$$

olup olmadığını gösteriniz.

3) Doğal sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği var mıdır? Gösteriniz.

4) $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{r} 4|a-b\,, \\ 4|a+b\,, \\ 4|b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4|a^3 - b^3$$

olduğunu gösteriniz.

5) i) $[5,1][m,n] + [3,2m] = [m+2, m]$

ii) $[mn, 5] < [m, n+2] + [3, m+1][2, n]$

ifadelerindeki bilinmeyenleri varsa bulunuz.

6) $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ olsun.

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

olup olmadığını gösteriniz.

BAŞARILAR

SOYUT MATEMATİK II ARA SINAV

CEVAPLARI

1) (20p) ⊛ $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall x, y \in A$ için $\sup\{x, y\}$, $\inf\{x, y\}$ mevcutsa A ya bir kafes denir.

örnek: $A \neq \emptyset$ olmak üzere $(2^A, \subseteq)$ bir kafestir.

⊛ $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a|b$ ve $b|a$ ise a ile b ye ilgilidirler denir.

örnek: $1, -1 \in \mathbb{Z}$

⊛ Her tam sayıyı bölen tam sayıya aritmetik birim denir.

örnek: 1 ve -1, $\mathbb{Z}$ nin aritmetik birimleridir.

⊛ $\emptyset \in X$ ve $\forall A \in X$ için $A^+ \in X$ şartını sağlayan X kümesine ardıllı küme denir.

örnek: Doğal sayılar kümesi

⊛ $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ için $(m, n) = 1$ ise bu iki sayı aralarında asaldır denir.

örnek: $(2, 3) = 1$ olduğundan 2 ve 3 aralarında asal sayıdır.

2.) $n < m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ni m = n+k$

(10p)

$$m^2 + pm = (m+p)m$$
$$= (n+k+p)m$$
$$= (n+p)m + \underbrace{km}_{\in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow (n+p)m < m^2 + pm$$

3.) $\forall m,n,p \in \mathbb{N}$ için $m(n+p) = mn + mp$

(20p)

$A = \{ p \in \mathbb{N} : \forall m,n \in \mathbb{N}$ için $m(n+p) = mn + mp \} \subseteq \mathbb{N}$

$A = \mathbb{N}$ mi ?

- $0 \in A$ mı?

$$\left.\begin{array}{l} mn = mn + 0 = mn + m.0 \\ mn = m(n+0) \end{array}\right\} \Rightarrow m(n+0) = mn + m0$$
$$\Rightarrow 0 \in A$$

- $p \in A$ için $p^+ \in A$ mı?

$p \in A \Rightarrow \forall m,n \in \mathbb{N}$ için $m(n+p) = mn + mp$ ... $(*)$

$p^+ \in A \overset{?}{\Longleftrightarrow} \forall m,n \in \mathbb{N}$ için $m(n+p^+) = mn + mp^+$

$$m(n+p^+) = m(n+p)^+ = m(n+p) + m$$
$$\underset{(*)}{=} mn + mp + m$$
$$= mn + mp^+$$

$\therefore A = \mathbb{N}$

4.) (10p)

$4 \mid a-b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni a-b=4k$

$4 \mid a+b \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \ni a+b=4k_1$

$4 \mid b^2 \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \ni b^2=4k_2$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=4k.(a^2+ab+b^2)$$
$$\Rightarrow 4 \mid a^3-b^3$$

5.) (20p) i) $[5,1][m,n]+[3,2m]=[m+2,m]$

$\Rightarrow [5m+n,\ 5n+m]+[3,2m]=[m+2,m]$

$\Rightarrow [5m+n+3,\ 5n+m+2m]=[m+2,m]$

$\Rightarrow (5m+n+3,\ 5n+3m) \sim (m+2,m)$

$\Rightarrow 5m+n+3+m=5n+3m+m+2$

$\Rightarrow 6m+n+3=5n+4m+2$

$\Rightarrow 2m+1=4n$

$\therefore$ Bu ifadeyi sağlayan $m,n \in \mathbb{N}$ yoktur.

ii) $[mn,5]<[m,n+2]+[3,m+1][2,n]$

$\Rightarrow [mn,5]<[m,n+2]+[6+mn+n,\ 3n+2m+2]$

$\Rightarrow [mn,5]<[6+mn+m+n,\ 4n+2m+4]$

$\Rightarrow mn+4n+2m+4<11+m+n+mn$

$\Rightarrow 3n+m<7, \quad m,n \in \mathbb{N}$

$n=0$ için $m=0,1,2,3,4,5,6$

$n=1$ için $m=0,1,2,3$

$n=2$ için $m=0$

6.) (20p) $a,b,c\in\mathbb{Z}$ olduğundan $\exists\, x,y,m,n,z,t\in\mathbb{N}\ \ni$

$a=[x,y]\ ,\ b=[m,n]\ ,\ c=[z,t]$

$a>0 \Rightarrow x>y \Rightarrow \exists\, k\in\mathbb{N} \ni x=y+k \ \cdots (*)$

$ab=ac \Rightarrow [x,y][m,n]=[x,y][z,t]$

$\Rightarrow [xm+yn,\ xn+ym]=[xz+yt,\ xt+yz]$

$\Rightarrow (xm+yn,\ xn+ym)\sim(xz+yt,\ xt+yz)$

$\Rightarrow (xm+yn)+(xt+yz)=(xn+ym)+(xz+yt)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} (y+k)m+yn+(y+k)t+yz=(y+k)n+ym+(y+k)z+yt$

$\Rightarrow km+kt=kn+kz$

$\Rightarrow k(m+t)=k(n+z)$

$\Rightarrow m+t=n+z$

$\Rightarrow (m,n)\sim(z,t)$

$\Rightarrow [m,n]=[z,t]$

$\Rightarrow b=c$