Ad-Soyad: **10.11.2024**
Numara:

SOYUT MATEMATİK I ARA SINAV SORULARI

1) a) $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\forall x \exists y\left[x^2 + y^2 < 128\right], \quad \exists x \exists y\left[x^2 - y^2 = 4\right], \quad \exists x \forall y\left[\left|\frac{y}{x}\right| = -\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

önermelerinin doğruluk değerlerini bularak değillerini yazınız.

b) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ olmak üzere " $x + y + z$ tek sayı ise x, y, z tek sayıdır" önermesini uygun bir yöntem ile ispatlayınız.

2) a) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ olmak üzere $P(A) = ?$

b) $P(P(P(\varnothing))) = ?$

3) a) " $\Rightarrow$ " bağlacının birleşme özelliği var mıdır? Gösteriniz.

b) $[p' \Leftrightarrow q]'$ önermesi $p \Leftrightarrow q$ önermesine denk olur mu? **Tablo kullanmadan** gösteriniz.

4) $\{A, B, D\}$ bir S kümesinin ayrışımı olmak üzere, $E \neq \emptyset$ kümesi için

$$\{A \times E, B \times E, D \times E\}$$

kümesinin de $S \times E$'nin bir ayrışımı olduğunu gösteriniz.

5) a) A ve B kümeleri için $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$ olur mu? Gösteriniz.

b) Her $y \in \mathbb{Z}_+$ için $A_y = \{y\}$ olsun. $I = \{p : p \ asal \ sayı\}$ olmak üzere

$$\bigcap_{i \in I} A_i = ? \qquad \bigcup_{i \in I} A_i = ?$$

NOT: Sınav süreniz 100 dakikadır.

BAŞARILAR

Cevaplar

1) a) • $[\forall x\, \exists y\, [x^2+y^2<128]] \equiv 0$

$$\{\forall x\, \exists y\, [x^2+y^2<128]\}' \equiv \exists x\, \forall y\, [x^2+y^2 \geq 128]$$

• $\{\exists x\, \exists y\, [x^2-y^2=4]\} \equiv 1$

$$[\exists x\, \exists y\, [x^2-y^2=4]]' \equiv \forall x\, \forall y\, [x^2-y^2 \neq 4]$$

• $\exists x\, \forall y\, [\,|\frac{y}{x}| = -(\frac{y}{x})\,] \equiv 0$

$$[\exists x\, \forall y\, [\,|\frac{y}{x}| = -(\frac{y}{x})]]' \equiv \forall x\, \exists y\, [\,|\frac{y}{x}| \neq -(\frac{y}{x})]$$

b) $x=2,\ y=1,\ z=4$ için

$x+y+z=7$ tek fakat x, y, z tek değil.

2) a) $\emptyset := a,\ \{\emptyset\} := b,\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} := c$ olsun.

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

b) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

3) a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$?

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

$\therefore$ "$\Rightarrow$" bağlacının birleşme özelliği yoktur.

b) $[p' \Leftrightarrow q]' \equiv [(p' \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')]'$

$\equiv [(p \vee q) \wedge (q' \vee p')]'$

$\equiv [((p \vee q) \wedge q') \vee ((p \vee q) \wedge p')]'$

$\equiv [((p \wedge q') \vee \underbrace{(q \wedge q')}_{0}) \vee ((\underbrace{p \wedge p'}_{0}) \vee (q \wedge p'))]'$

$\equiv [(p \wedge q') \vee (q \wedge p')]'$

$\equiv [(p' \vee q) \wedge (q' \vee p)]$

$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$

4) $\{A, B, D\}$, S kümesinin bir ayrışımı olduğundan

- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $A \cap D \neq \emptyset$
- $A \cup B \cup D = S$

vardır.

- $E \neq \emptyset, A \neq \emptyset \Rightarrow A \times E \neq \emptyset$
  $E \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow B \times E \neq \emptyset$
  $E \neq \emptyset, D \neq \emptyset \Rightarrow D \times E \neq \emptyset$ ... ①

- $(A \times E) \cap (B \times E) = (A \cap B) \times E = \emptyset \times E = \emptyset$
  $(A \times E) \cap (D \times E) = (A \cap D) \times E = \emptyset \times E = \emptyset$
  $(B \times E) \cap (D \times E) = (B \cap D) \times E = \emptyset \times E = \emptyset$ ... ②

- $(A \times E) \cup (B \times E) \cup (D \times E) = (A \cup B \cup D) \times E$
  $= S \times E$ ... ③

$\therefore$ ①, ② ve ③ den $\{A \times E, B \times E, D \times E\}$ kümesi $S \times E$ nin bir ayrışımıdır.

5) a)

$$(A\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B) = A\cap(B\cup B')\cup(A'\cap B)$$
$$=(A\cap E)\cup(A'\cap B)$$
$$= A\cup(A'\cap B)$$
$$=(A\cup A')\cap(A\cup B)$$
$$= E\cap(A\cup B)$$
$$= A\cup B$$

5) $I=\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

- $\bigcap_{i\in I} A_i = A_2\cap A_3\cap A_5\cap\dots$
$$=\{2\}\cap\{3\}\cap\{5\}\cap\dots$$
$$=\varnothing$$

- $\bigcup_{i\in I} A_i = A_2\cup A_3\cup A_5\cup\dots$
$$=\{2\}\cup\{3\}\cup\{5\}\cup$$
$$=I$$