Ad-Soyad:

Numara: **19.06.2025**

SOYUT MATEMATİK II FİNAL SORULARI

1. Ardıllı küme, tam sayılar kümesi ve Dedekind kesimi tanımlarını yapınız. (20p)

2. T sayılabilir bir küme, Y sonlu bir küme ve $S = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $T \times S \times Y$ sayılabilir bir küme olur mu? Gösteriniz. (20p)

3. i) Pozitif bir tam sayının negatif bir tam sayıdan büyük olduğunu gösteriniz. (10p)

   ii) $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $x < y$ ise $y = x + a$ olacak şekilde bir a pozitif tam sayısı mevcuttur. Gösteriniz. (10p)

4. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ denk rasyonel sayılar olmak üzere

   i) $a = 0 \implies c = 0$,

   ii) $ab < 0 \implies cd < 0$

   olur mu? Gösteriniz. (20p)

5. i) $[(1,5)]\odot[(x,-2)] = [(1,10)]$ ve $[(2,x)]\oplus[(0,3)] = [(4,y)]$ eşitliklerini birlikte gerçekleyen x ve y sayılarını bulunuz. (10p)

   ii) $[5,2].[3,r] + [r,4] < [2+r,3]$ eşitsizliğini sağlayan r sayısını bulunuz. (10p)

BAŞARILAR

NOT: Sınav süreniz 100 dakikadır.

CEVAPLAR

1) Ders notlarına bakınız.

2) T sayılabilir bir küme $\Leftrightarrow \exists f : T \xrightarrow{\text{1-1 örten}} M \subseteq \mathbb{N}$
$t \mapsto f(t)$

Y sonlu bir küme olduğundan sayılabilirdir.

Y sayılabilir $\Leftrightarrow \exists g : Y \xrightarrow{\text{1-1 örten}} K \subseteq \mathbb{N}$
$y \mapsto g(y)$

$S = \{3k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ sayılabilir ve sayılabilir kümelerin alt kümeleri de sayılabilir olduğundan S kümesi sayılabilirdir.

S sayılabilir $\Leftrightarrow \exists\, h: S \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} C \subseteq \mathbb{N}$

$3k \longmapsto h(3k)$

$T\times S\times Y$ sayılabilir mi?

$$f_1 : T\times S\times Y \longrightarrow M\times C\times K \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$
$$(t,3k,y) \longmapsto f_1(t,3k,y) = \big(f(t), h(3k), g(y)\big)$$

f_1 iyi tanımlı

f_1 1-1

f_1 örten

(Ders notlarına bakınız)

olduğundan $T\times S\times Y$ sayılabilirdir.

3) i) $x=[a,b]\in \mathbb{Z}_+$ $\quad y=[c,d]\in\mathbb{Z}_-$

$x\in\mathbb{Z}_+ \Rightarrow a>b$ ve $y\in\mathbb{Z}_- \Rightarrow c<d$ dır.

$$b<a \text{ ve } c<d \Rightarrow b+c<a+d$$
$$\Rightarrow c+b<d+a$$
$$\Rightarrow [c,d]<[a,b]$$
$$\Rightarrow y<x$$

ii) $x=[a,b]$, $y=[c,d]$, $x<y$ olsun.

$$x<y \Rightarrow [a,b]<[c,d] \Rightarrow a+d<b+c$$

$$a+d<b+c \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}^* \text{ için } b+c=a+d+k$$
$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}^* \text{ için } c+b=d+a+k$$
$$\Leftrightarrow [c,d]=[a+k,b]=[a+k,b+0]$$
$$\Leftrightarrow [c,d]=[a,b]+[k,0]$$
$$\Leftrightarrow y=x+a \text{ olacak şekilde } a=[k,0] \text{ vardır.}$$

4) i) $\frac{a}{b}=[(a,b)]$ $\quad \frac{c}{d}=[(c,d)]$

$$(a,b)\,\beta\,(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$$
$$\Leftrightarrow 0d=bc \Rightarrow 0=bc$$
$$\Leftrightarrow b\cdot 0=bc \underset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} 0=c$$

ii) $(a,b)\, \beta\, (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$\Rightarrow (ad)(ad) = (ad)bc$

$\Rightarrow (ad)^2 = (ab)(cd)$

$ab < 0$ olsun. Bu durumda $a \neq 0$ dır. (Çünkü $a = 0$ olur ise $ab = 0$ olur.) Ayrıca tanım gereği $d \neq 0$ dır.

$\left.\begin{matrix} a \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ad \neq 0 \Rightarrow (ad)^2 > 0$

$\underbrace{(ad)^2}_{>0} = \underbrace{(ab)}_{<0}(cd) \Rightarrow cd < 0$ olur.

5) i) $[(1,5)] \odot [(x,-2)] = [(1,10)]$

$\Rightarrow [(1.x, 5.(-2))] = [(1,10)]$

$\Rightarrow [(x,-10)] = [(1,10)] \Rightarrow (x,-10)\, \beta\, (1,10) \Rightarrow x.10 = -10.1$

$\Rightarrow x.10 = -1.10$

$\Rightarrow \boxed{x = -1}$

$[(2,x)] \oplus [(0,3)] = [(4,y)]$

$\Rightarrow [(2,-1)] \oplus [(0,3)] = [(4,y)]$

$\Rightarrow [(2.3 + (-1).0,\ (-1).3)] = [(4,y)]$

$\Rightarrow [(6,-3)] = [(4,y)] \Rightarrow (6,-3)\, \beta\, (4,y)$

$\Rightarrow 6y = -3.4 = -12$

$\Rightarrow 6y = 6.(-2) \Rightarrow \boxed{y = -2}$

ii) $[5,2].[3,r] + [r,4] < [2+r, 3]$

$\Rightarrow [15+3r,\ 5r+10] < [2+r, 3]$

$\Rightarrow 15 + 3r + 3 < 5r + 10 + 2 + r$

$\Rightarrow 18 + 3r < 6r + 12 \Rightarrow 12 + (6+3r) < 6r + 12$

$\Rightarrow 6 + 3r < 6r \Rightarrow 6 + 3r < 3r + 3r$

$\Rightarrow 6 < 3r \Rightarrow 3.2 < 3r \Rightarrow 2 < r$

$\therefore 2 < r$