MAT. 307 TOPOLOJİYE GİRİŞ DERSİ ARA SINAV SORULARI VE CEVAPLARI

1. Metrik uzaylarda açık yuvar, iç nokta, açık küme, bir noktanın bir alt kümeye uzaklığı, iki alt kümenin birbirine uzaklığı, bir alt kümenin çapı, sınırlılık, denk metrik, izometriklik ve süreklilik kavramlarını tanımlayınız.

Çözüm:

Açık yuvar : (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda;

$$B_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir.

İç nokta : (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. Eğer $B(x, r) \subset A$ olacak şekilde pozitif bir r sayısı varsa x e A nın bir iç noktası denir.

Açık küme : Bütün noktaları iç nokta olan bir kümeye açık küme denir.

İki küme arasındaki uzaklık : (X, d) bir metrik uzay ve A ile B, X in boş olmayan iki altkümesi olsun.

$$d(A, B) = inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

sayısına A ile B kümeleri arasındaki uzaklık denir.

Noktanın alt kümeye uzaklığı : Eğer $A = \{x\}$ ise;

$$d(x, B) = inf\{d(x, y) : y \in B\}$$

sayısına x noktasının B kümesine uzaklığı denir.

Kümenin çapı : A kümesinin noktaları arasındaki uzaklıkların oluşturduğu kümenin en küçük üst sınırına(eküs) A nın çapı denir ve

$$d(A) = sup\{d\{x, y\} : x, y \in A\}$$

şeklinde yazılır.

Sınırlılık : Çapı sonlu olan kümelere sınırlı kümeler denir.

Denk metrik : X kümesi üzerinde d, d' ve d'' üç metrik ve $\alpha > 0, \beta > 0$ reel sayılar olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için;

$$\alpha d''(x, y) < d'(x, y) < \beta d(x, y)$$

bağıntısı varsa bu metriklere denk metrikler denir.

İzometri : (X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ için X den Y ye $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ olacak şekilde bire-bir f fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna bir izometri denir.

Süreklilik : (X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı pozitif bir δ sayısı varsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir, denir.

2. (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) metrik uzaylar olmak üzere $X = X_1 \times X_2$ olsun. $d : X \times X \to IR$ fonksiyonu her $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in X$ için

$$d(a, b) = maks\{d_1(a_1, b_1), d_2(a_2, b_2)\}$$

ile tanımlanıyor. d fonksiyonu X üzerinde bir metrik yapı oluşturur mu ?

Çözüm : $a, b, c \in X$ olmak üzere $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2) \in X$ olacak şekilde $a_1, b_1, c_1 \in X_1$ ve $a_2, b_2, c_2 \in X_2$ vardır.

M1) Hipotezden d_1, X_1 üzerinde ve d_2, X_2 üzerinde metrikler olduğundan $d_1(a_1, b_1) \geq 0$ ve $d_2(a_2, b_2) \geq 0$ dır. Böylece $d(a, b) \geq 0$ dır.

M2) $d(a, b) = 0$ olsun. Bu durumda $0 \leq d_1(a_1, b_1) \leq maks\{d_1(a_1, b_1), d_2(a_2, b_2)\} = d(a, b) = 0$ olup $d_1(a_1, b_1) = 0$ dır. d_1, X_1 üzerinde metrik olduğundan $a_1 = b_1$ dir. Benzer şekilde, $d_2(a_2, b_2) = 0$ dır. d_2, X_2 üzerinde metrik olduğundan $a_2 = b_2$ dir. Sıralı ikililerin eşitliği tanımından $a = (a_1, a_2) = (b_1, b_2) = b$ dir.

Tersine, kabul edelim ki $a = b$ olsun. Böylece $a_1 = b_1$ ve $a_2 = b_2$ dir. d_1, X_1 üzerinde ve d_2, X_2 üzerinde metrikler olduğundan $d_1(a_1, b_1) = 0$ ve $d_2(a_2, b_2) = 0$ dır. O halde

$$d(a, b) = maks\{d_1(a_1, b_1), d_2(a_2, b_2)\} = maks\{0\} = 0$$

olup $d(a, b) = 0$ dır.

M3)

$$\begin{aligned} d(a,b) = \quad d\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) &= maks\{d_1(a_1, b_1), d_2(a_2, b_2)\} \\ &= maks\{d_1(b_1, a_1), d_2(b_2, a_2)\} \\ &= d\big((b_1, b_2), (a_1, a_2)\big) = d(b, a) \end{aligned}$$

M4)

$$\begin{aligned} d(a,b) &= maks\{d_1(a_1,b_1), d_2(a_2,b_2)\} \\ &\leq maks\{d_1(a_1,c_1) + d_1(c_1,b_1), d_2(a_2,c_2), d_2(c_2,b_2)\} \\ &= maks\{d_1(a_1,c_1), d_2(a_2,c_2)\} + maks\{d_1(c_1,b_1), d_2(c_2,b_2)\} \\ &= d(a,c) + d(c,b) \end{aligned}$$

Sonuç olarak d, $X = X_1 \times X_2$ üzerinde bir metriktir.

3. (X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} d(x,A) &= inf\{d(x,a) : a \in A\} \\ &\leq inf\{d(x,y) + d(y,a) : a \in A\} \\ &\leq d(x,y) + inf\{d(y,a) : a \in A\} \\ &= d(x,y) + d(y,A) \\ d(x,A) - d(y,A) &\leq d(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y,A) &= inf\{d(y,a) : a \in A\} \\ &\leq inf\{d(y,x) + d(x,a) : a \in A\} \\ &\leq d(y,x) + inf\{d(x,a) : a \in A\} \\ &= d(x,y) + d(x,A) \\ d(y,A) - d(x,A) &\leq d(x,y) \end{aligned}$$

Sonuç olarak; $d(x,A)-d(y,A)\le d(x,y)$ ve $d(y,A)-d(x,A)\le d(x,y)$ eşitsizliklerinden istenilen elde edilmiş olur.

4. Boştan farklı bir X kümesi üzerinde herhangi iki topolojik yapı aynıdır ancak ve ancak uzayın her noktasında bu yapılara göre oluşturulan komşuluk aileleri aynıdır, gösteriniz.

Çözüm : (X,τ_1) ve (X,τ_2) iki topolojik uzay olsun. $\tau_1=\tau_2 \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $N_1(x)=N_2(x)$

$(\Rightarrow)\tau_1=\tau_2$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}\forall N\in N_1(x) \quad &\Leftrightarrow \exists U\in\tau_1\, var \ni x\in U\subset N\\ &\Leftrightarrow \exists U\in\tau_2\, var \ni x\in U\subset N\\ &\Leftrightarrow N\in N_2(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1(x)=N_2(x)$$

$(\Leftarrow)$ $\forall x\in X$ için $N_1(x)=N_2(x)$ olsun.

$$\begin{aligned}\forall U\in\tau_1(x) \quad &\Leftrightarrow \forall x\in U \text{ için } U\in N_1(x)\\ &\Leftrightarrow \forall x\in U \text{ için} U\in N_2(x)\\ &\Leftrightarrow U\in\tau_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau_1=\tau_2$$

5. (IR,τ_d) alışılmış reel uzay ve $A=[0,1)\cup\{2\}$ alt kümesi verilsin. Eğer varsa A nın değme, yığılma ve ayrık noktalarını bulunuz.

Çözüm: A nın değme noktalarının kümesini bulmak için $x\in IR$olmak üzere her $N\in N(x)$ için $N\cap A\neq\emptyset$ olmalıdır. O halde $x\in(-\infty,0)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$ için her $\varepsilon>0$ olmak üzere

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\emptyset$$

olup bu aralıktaki elemanların hiç birisi değme noktası değildir. $x\in[0,1]\cup\{2\}$ için her $\varepsilon>0$ olmak üzere

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$$

olup bu elemanların her biri değme noktasıdır. Böylece $değA=[0,1]\cup\{2\}\subset IR$ dir.

A nın yığılma noktalarının kümesini bulmak için $x\in IR$olmak üzere her $N\in N(x)$ için $[N\backslash\{x\}]\cap A\neq\emptyset$ olmalıdır. O halde $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ için her $\varepsilon>0$ olmak üzere

$$[(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\backslash\{x\}]\cap A=\emptyset$$

olup bu aralıktaki elemanların hiç birisi yığılma noktası değildir. $x\in[0,1]$ için her $\varepsilon>0$ olmak üzere

$$[(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\backslash\{x\}]\cap A\neq\emptyset$$

olup bu aralıktaki elemanların her biri yığılma noktasıdır. Böylece $A'=[0,1]\subset IR$ dir. Ayrıca $2\in A$ olmasına rağmen bir yığılma noktası değildir. Gerçekten; $[(2-\varepsilon,2+\varepsilon)\backslash\{2\}]\cap A=\emptyset$ dir.

Son olarak A nın ayrık noktalarına bakalım. Tanım gereği; $a\in A$ fakat $a\notin A'$ olan noktalar ayrık noktalardır. O halde sadece $\{2\}\in A$ noktası kümeye ait fakat yığılma noktası olmadığından ayrık noktadır.

6. Topolojik uzaylarda bir alt küme kapalıdır ancak ve ancak yığılma noktalarını içerir, gösteriniz.

Çözüm : A kapalı olsun. Bu durumda $A=\bar{A}$ dır. $A=\bar{A}=A\cup A'$ olup $A'\subset A$ dır.

Tersine olarak $A'\subset A$ olsun. A kapalı mı ?

$$A'\subset A\Rightarrow A\cup A'\subset A\cup A=A\Rightarrow \bar{A}\subset A$$

olur. Ayrıca $A\subset\bar{A}$ olduğunu biliyoruz. O halde $A=\bar{A}$ bulunur. Dolayısıyla A kapalıdır.