2024-2025 GÜZ DÖNEMİ OMÜ-FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOPOLOJİYE GİRİŞ ARA SINAVI-CEVAP ANAHTARI

09 Kasım 2024 Saat: 09.00

S1) (X,d) bir metrik uzay ve $\varnothing \neq A \subset X$ olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

olduğunu gösteriniz(20 puan).

Çözüm: Ders notlarında bulunmaktadır.

S2) $x = (-1,2,4) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün norm değerlerini hesaplayınız (10 puan).

- $\|x\|_1 = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} |x_k|^2} = ?$

  Çözüm: $\|(-1,2,4)\|_1 = \sqrt{|-1|^2 + |2|^2 + |4|^2} = \sqrt{21}$

- $\|x\|_2 = \underset{k=1,2,3}{\text{maks}} \{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = ?$

  Çözüm: $\|(-1,2,4)\|_2 = \text{maks}\{|-1|, |2|, |4|\} = \text{maks}\{1,2,4\} = 4$

S3) Aşağıda tanımlı fonksiyonların neden metrik olmadığını bir örnek vererek açıklayınız (30 puan).

i. $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d_1(x,y) = \sin^2(x-y)$

   Çözüm: $d_1(x,y) = \sin^2(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olmak zorunda değildir. $x = \pi$ ve $y = 0$ için $d(\pi,0) = \sin^2(\pi - 0) = \sin^2 \pi = 0$ dır ancak $x \neq y$ dir. Metrik olamaz.

ii. $d_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad d_2(m,n) = |m-n|^2$

   Çözüm: $n = 1, m = 3 \text{ ve } p = 2$ sayıları için üçgen eşitsizliği sağlanmaz, $d_2(3,1) = 4 > d_2(3,2) + d_2(2,1) = 1 + 1 = 2$ elde edilir. Metrik olamaz.

iii. $d_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

   Çözüm: $x = (2,3)$ ve $y = (2,4)$ seçelim. O zaman $x \neq y$ dir, fakat $d_3(x,y) = \min\{0,1\} = 0$ olur. Metrik olamaz.

S3) $f,g\in C[0,1]$ olmak üzere $f(x)=3x-2$ ve $g(x)=1-2x$ fonksiyonları için aşağıdaki metriklere göre hesaplamaları yapın (20 puan).

- $d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx=?$

Çözüm:

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |(3x-2)-(1-2x)|dx \\ &= \int_0^1 |5x-3|dx \\ &= \int_0^{\frac{3}{5}} (3-5x)dx+\int_{\frac{3}{5}}^1 (5x-3)dx \\ &= \frac{13}{10} \end{aligned}$$

- $d_2(f,g)=\left(\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=?$

Çözüm:

$$d_2(f,g)=\left(\int_0^1 |(3x-2)-(1-2x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^1 |5x-3|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^1 (25x^2-30x+9)dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

S4) $d_\infty(x,y)=\sup\{|f(t)-g(t)|:t\in[1,2]\}$ olmak üzere $(C[1,2],d_\infty)$ uzayı ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$f_n(t)=\frac{nt}{n+t}$$

şeklinde tanımlı $\{f_n\}$ dizisinin yakınsaklığını araştırınız(20 puan).

Çözüm: $\mathbb{R}$ alışılmış uzayında her $t\in[1,2]$ için

$$f(t)=\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{nt}{n+t}=t$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
d_\infty(f_n, f) &= \sup\left\{\left|f_n(t) - f(t)\right| : t \in [1,2]\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\frac{nt}{n+t} - t\right| : t \in [1,2]\right\} \\
&= \sup\left\{\left|-\frac{t^2}{n+t}\right| : t \in [1,2]\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{t^2}{n+t} : t \in [1,2]\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{t^2}{n} : t \in [1,2]\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{4}{n} : t \in [1,2]\right\} = \frac{4}{n}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $n \to \infty$ için limit alınırsa $d_\infty(f_n, f) \to 0$ olur, yani fonksiyon dizisi yakınsaktır.

Dr. Öğr. Üyesi Elif KAPLAN