2.2. PROBLEMLER

2.2.1. Aşağıda a_k genel terimi ile verilen dizilerin yakınsak olup olmadığını araştırınız, yakınsak olanların limitini bulunuz.

a) $\mathbf{a}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ b) $\mathbf{a}_k = \left(\frac{(\sin k)^k}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$

c) $\mathbf{a}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right)$ d) $\mathbf{a}_k = \left(\frac{2}{k}, \frac{k+2}{k}, \frac{1}{2^k}\right)$

2.2.2. Genel terimi $a_k = (-1)^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ olan dizinin yakınsak olup olmadığını araştırınız. (a_{2k}) ve (a_{2k+1}) alt dizilerini bulunuz ve yakınsaklıklarını inceleyiniz.

2.2.3. Genel terimi $\mathbf{a}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ olan dizinin kaç terimi $N\left((0,0)\,;1/2\right)$ civarının dışındadır.

2.2.4. (a_k) reel bir dizi ve $|a_k - a_{k+1}| < \frac{1}{2^k}$ şartını sağlıyorsa (a_k) nın yakınsak olduğunu gösteriniz.

2.2.5. Genel terimi $a_k = \frac{10^k}{10^k - 1}$ olan dizinin limitinin 1 olduğunu gösteriniz.

2.2.6. $a_1 = 0$ ve $a_k = \frac{1}{2 - a_{k-1}}$ olarak verilen (a_k) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

2.2.7. $\lim_{k\to\infty} \frac{\log k}{k} = 0$ olduğunu gösteriniz.

2.2.8. $(a_k) = (a_1, a_2, , , , a_k, ...)$ reel dizisi ve $m \in \mathbb{N}$ verilmiş olsun.

$$(a_m) = (a_{m+1}, a_{m+2}, , , , a_{m+k}, ...)$$

dizisine (a_k) dizisinin **kuyruğu** denir. Bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart onun kuyruk dizisinin yakınsak olmasıdır. İspatlayınız.

2.2.9. (a_k) ve (b_k) iki reel dizi ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. Ayrıca $c > 0$ ve $k > k_1$ için

$$|b_k - b| \leq c\,|a_k| \quad ve \quad \lim a_k = 0$$

ise $\lim b_k = b$ olduğunu gösteriniz.

2.2.10. $a_k \geq 0$ ve (a_k) reel dizisi yakınsak ise limitin negatif olmadığını yani $a_k \to a \geq 0$ olduğunu gösteriniz.

2.2.11. (a_k) ve (b_k) yakınsak iki reel dizi ve $a_k \leq b_k$ ise $\lim a_k \leq \lim b_k$ olduğunu gösteriniz.

2.2.12. (a_k) yakınsak reel bir dizi ve her $k \in \mathbb{N}$ için $c \leq a_k \leq d$ ise $c \leq \lim a_k \leq d$ olduğunu gösteriniz.

2.2.13. $a_k = \int_1^k \frac{\cos t}{t^2} dt$ ise (a_k) nın yakınsak olduğunu gösteriniz.

2.2.14. (a_k) dizisi a ya yakınsak ise (a_k) nın her alt dizisinin de a ya yakınsadığını gösteriniz.

2.2.15. $A \subset \mathbb{R}^n$ ve (a_k) , A da bir dizi olsun. $a_k \to a$ ise $a \in \overline{A}$ olduğunu gösteriniz.

2.2.16. Aşağıda genel terimi verilmiş diziler için $\limsup a_k$ ve $\liminf a_k$ 'yı bulunuz.

$$a_k = (-1)^k(2 + \frac{3}{k}), \quad a_k = \frac{k + (-1)^k(2k+1)}{k}$$

2.2.17. $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn})$ olmak üzere

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn})$$

ifadesine $\mathbb{R}^n$ de seri denir. $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k2}$, ..., $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn}$ serilerine ise bu serinin **bileşen serileri** denir.