

2.3. PROBLEMLERİ

2.3.1. Aşağıda verilen örtülerin, yanlarında verilen kümelerin açık örtüsü olup olmadığını araştırınız.

- a) $\{(x - \frac{1}{10}, x + \frac{1}{10}) : x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}, S = (0, 1)$
- b) $\left\{ \left(\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right) : n = 1, 2, \dots \right\}, S = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$
- c) $\left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) : n = 2, 3, 4, \dots \right\}, S = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$
- d) $\left\{ [0, \frac{1}{2^n}) : n = 1, 2, 3, \dots \right\}, S = \left\{ \frac{1}{n} : n = 3, 4, 5, \dots \right\}$

2.3.2. Problem 1 deki açık ailelerin hangisinin sonlu bir alt örtüsü vardır?

2.3.3. Aşağıdaki kümelerin kompakt olup olmadığını araştırınız.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1 \text{ ve } x \text{ rasyonel}\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\} \cap \{(x, y) : x^2 + y^2 < 5\}.$$

2.3.4. Aşağıdaki kümelerin hangileri kompakttır?

a) $\{(x, y) : x^2 - y^2 \leq 1\}$

b) $\{(x, y) : y = \sin \frac{1}{x}, |x| \leq \pi\}$

c) $\{(r, \theta) : r = e^{-\theta}, \theta \geq 0\}$, burada r ve θ kutupsal koordinatlarıdır.

d) $\{(x, y) : y = \log x, 0 < x \leq 1\}$

e) $\{(x, y) : x^6 + y^6 \leq 1\}$

f) $\{(x, y) : x \text{ rasyonel ve } 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}$

2.3.5. S , \mathbb{R} nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olsun ($S \neq \emptyset$). $S \subset [a, b]$ olduğunu farzedelim. $a_1 = \inf S$ ve $b_1 = \sup S$ olsun. $a_1, b_1 \in S$ ve $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ olduğunu gösteriniz.

2.3.6. $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nin kompakt olmadığını gösteriniz.

2.3.7. $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ in kompakt olduğunu gösteriniz.

2.3.8. \mathbb{R} de $x_k \rightarrow x$ ve $K = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ ise K nin kompakt olduğunu gösteriniz.

2.3.9. $A \subset \mathbb{R}$ kompakt ve $B \subset \mathbb{R}$ kapalı ise $A \cap B$ nin kompakt olduğunu gösteriniz.

2.3.10. $A \subset \mathbb{R}$ olsun. A nın iki açık örtüsünü belirtiniz.

2.3.11. $A = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ ise

$$T_0 = \{(0, \infty)\}, \quad T_1 = \{(r-1, r+1) : r \in \mathbb{Q}, r > 0\},$$

$$T_2 = \{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\}, \quad T_3 = \{(0, n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 25\}$$

ailelerinin her biri A nın bir örtüsü müdür? T_2 ve T_4 hangi örtülerin alt örtüsüdür? Bunları her birinin sonlu alt örtüsü var mıdır?