Adı-Soyadı:

Numarası:

10.01.2025

MAT 101 ANALİZ I DERSİ FİNAL SORULARI

1) $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{(x^2-9)(x-2)}{x^2-2x-3}<0\right\}$ kümesinin varsa maksimal elemanını ve supremumunu bulunuz. (10 puan)

2) $\left(\cot x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-2\right).(\cos x-\sin 2x)=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. (15 puan)

3) $x_1=0{,}1,\ x_2=0{,}11,\ x_3=0{,}111,\ldots,\ x_n=0{,}\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ tane}},\ldots$ dizisinin $\dfrac{1}{9}$ sayısına yakınsadığını gösteriniz. (15 puan)

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ limitini hesaplayınız. (10 puan)

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-1}{5x^2+3}\right)^{x^2\arctan x}$ limitini hesaplayınız. (10 puan)

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x}{1-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ limitini hesaplayınız. (10 puan)

7) $f:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $a\in A$ noktasında sürekli bir fonksiyon ve $f(a)>0$ olsun. Bu durumda a noktasının içerisindeki tüm x noktaları için $f(x)>0$ olacak şekilde bir komşuluğu vardır, ispatlayınız. (15 puan)

8) $f(x)=\begin{cases}-[\![x]\!], & -1<x\le 0\\ \dfrac{|x|\operatorname{sgn}(x)}{x}, & 0<x<1\\ x^2-x+1, & 1\le x<2\end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonu veriliyor. Buna göre

a) f fonksiyonunun $x=0$ ve $x=1$ noktalarında limitinin varlığını araştırınız. (5 puan)

b) f fonksiyonu $x=0$ ve $x=1$ noktalarında sürekli midir? Süreksiz olduğu nokta varsa türünü belirleyiniz. (10 puan)

Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar…

Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

1) $x=-3,\ x=3,\ x=2,\ x=-1$ kritik noktalar

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,\infty)$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x^2-9)(x-2)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$+$
x^2-2x-3	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x^2-9)(x-2)}{x^2-2x-3}$	$-$	0	$+$	Tanımsız	$-$	0	$+$	Tanımsız	$+$

$A=(-\infty,-3)\cup(-1,2)$

Maksimal eleman yok. $\sup A = 2$

4) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}+\sqrt{n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0}}}$$

$$=1$$

CamScanner ile tarandı

2) $\left(\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} - 2\right) \cdot (\cos x - \sin 2x) = 0$ denklemini

çözünüz.

ÇÖZÜM:

$$\left(\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} - 2\right) \cdot (\cos x - \sin 2x) = 0.$$

$$\Rightarrow \cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} - 2 = 0 \quad \text{veya} \quad \cos x - \sin 2x = 0$$

$$\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)} = 2$$

$$\Rightarrow 1+\cos x = 2\sin x(1+\cos x)$$

$$\Rightarrow (1+\cos x)(1-2\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos x = -1}_{\text{olamaz}} \quad \text{veya} \quad \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{veya} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x - \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos x - 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \quad \text{veya} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{veya} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{veya} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ç.K} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3) $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,11$, $x_3 = 0,111$, ... dizisinin genel terimini bulunuz ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{9}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$x_1 = 0,1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{9}\cdot\frac{10-1}{10} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

$$x_2 = 0,11 = \frac{11}{100} = \frac{1}{9}\cdot\frac{99}{100} = \frac{1}{9}\cdot\frac{100-1}{100} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

$$x_3 = 0,111 = \frac{111}{1000} = \frac{1}{9}\cdot\frac{999}{1000} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1000-1}{1000} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^3}\right)$$

$\vdots$

$$x_n = 0,111\ldots1 = \frac{\overbrace{111\ldots1}^{n \text{ tane}}}{10^n} = \frac{1}{9}\cdot\frac{\overbrace{99\ldots9}^{n \text{ tane}}}{10^n} = \frac{1}{9}\cdot\frac{10^n-1}{10^n} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

olup dizinin genel terimi $x_n = \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ dir.

Şimdi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{9}$ olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0$ olduğunda $\left|\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-\frac{1}{9}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$$\left|\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-\frac{1}{9}\right| = \left|\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{10^n}-1\right)\right|$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$10^n > n$ $\qquad$ $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$ $\qquad$ $n_0 = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1 \in \mathbb{N}$

6) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x . \cos 2x + \sin 2x \cos x}{1-\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{1-\dfrac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x . \tan\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{1-\dfrac{\tan x + 1}{1-\tan x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x) . (1-\tan x)}{-2\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)(1-\tan x) . \cos x}{-2\sin x} \to 3$$

$$= -3/2$$

7) Notlarda var.

8) $f(x)=\begin{cases} -[|x|], & -1<x\leq 0 \\ \dfrac{|x|\,\mathrm{sgn}x}{x}, & 0<x<1 \\ x^2-x+1, & 1\leq x<2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -[|x|] = -(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|.\mathrm{sgn}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x.1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ olduğundan $x=0$ noktasında limit vardır ve 1 dir.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x|.\mathrm{sgn}x}{x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x.1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-x+1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ olduğundan $x=1$ noktasında limit vardır ve 1 dir.

b) $f(0)=0\neq 1$ olduğunda f, $x=0$ da sürekli değildir

$x=0$ kaldırılabilir süreksizlik noktası

$f(1)=1$ olduğundan f, $x=1$ de süreklidir.

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-1}{5x^2+3}\right)^{x^2.\arctan x} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-1}{5x^2+3}-1\right).\,x^2\arctan x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-1-5x^2-3}{5x^2+3}\,.\,x^2.\arctan x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^2}{5x^2+3}.\arctan x}$

$= e^{-\frac{4}{5}.\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{2\pi}{5}}$