

Adı- Soyadı:

Numara:

03.01.2025

CEBİR I DERSİ FİNAL SINAVI

**Soru 1)**  $G$  ve  $H$  iki grup,  $f: G \rightarrow H$  bir örten grup homomorfizması olsun.  $K$ ,  $G$ 'nin normal alt grubu ise  $f(K)$  da  $H$ 'nin normal alt grubudur, ispatlayınız.

**Soru 2)** a) Sıfırdan farklı iki tam sayının en büyük ortak böleni vardır, ispatlayınız.

b)  $G$  bir grup,  $N$ ,  $G$ 'nin normal alt grubu olsun.  $\forall aN, bN \in G/N$  için  $(aN)(bN) = (ab)N$  olduğunu ispatlayınız.

**Soru 3)** a)  $(G, \cdot)$  değişmeli bir grup ve  $H = \{a \in G \mid \forall x \in G \text{ için } a^{-1}x = ax\}$  olsun.  $H$  kümesi

$G$ 'nin bir alt grubu mudur, araştırınız.

b)  $G = \{2a + 2bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv -b \pmod{4}\}$  işlemi karmaşık sayılardaki "+" toplama işlemi olmak üzere  $(G, +)$  bir değişmeli gruptur.

$f: G \rightarrow \mathbb{Z}$

$$2a + 2bi \rightarrow f(2a + 2bi) = \frac{a - 3b}{4}$$

fonksiyonu veriliyor.  $f$ 'nin grup homomorfizması olduğunu gösteriniz ve çekirdeğini bulunuz.

**Soru 4)** a)  $Z_{12}$  grubu için  $H_1 = \langle \bar{3} \rangle, H_2 = \langle \bar{4} \rangle$  alt grupları veriliyor.  $Z_{12} = H_1 \oplus H_2$  midir, araştırınız.

b)  $Z_{20}^*$  grubunun  $H = \langle \bar{3} \rangle$  alt gurubu veriliyor.  $Z_{20}^*/H$  bölüm grubunun elemanlarını belirleyiniz.

**Soru 5)** a)  $S_8$  de  $\alpha = (14)(568)(371)(123)$  ile  $\beta = (23)(347)(2567)$  permütasyonları veriliyor.

$\circ(\alpha), \circ(\beta)$  ve  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  permütasyonunu bulunuz.

b)  $G$  bir grup olsun.  $\forall x, y \in G$  için  $(xy)^2 = x^2y^2$  ise değişmeli grup mudur, araştırınız.

Prof. Dr. Şenol Eren

03/01/2025 15:36

1-) Defterinizde var.

2-) a) "  
b) "

3-) a)  $H = \{a \in G \mid \forall x \in G \text{ için } a^{-1}x = ax\}$  olsun  
 $e \in G$  için  $e^{-1}x = ex$  olup  $e \in H$ ,  $H \neq \emptyset$   
 $\forall a, b \in H$  için  $a^{-1}x = ax$  ve  $b^{-1}x = bx$  dir.  $\forall x \in G$  için

$$\begin{aligned} (a^{-1}b^{-1})x &= a^{-1}(b^{-1}x) = a^{-1}(bx) = a^{-1}(bax) \\ (a^{-1}b^{-1})x &= (a^{-1}b)^{-1}x = (a^{-1}b)^{-1}(bx) = a^{-1}(b^{-1}x) = a^{-1}(bx) \\ &= (a^{-1}b)^{-1}x \end{aligned}$$

olur. Yani  $\forall a, b \in H$  için  $a^{-1}b^{-1} \in H$  dir.

b)  $f: G \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $2a+2bi \rightarrow f(2a+2bi) = \frac{a-3b}{4}$

$\forall 2a+2bi, 2c+2di \in G$  için

$$\begin{aligned} f[(2a+2bi) + (2c+2di)] &= f[2(a+c) + 2(b+d)i] \\ &= \frac{a+c-3(b+d)}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{a-3b}{4} + \frac{c-3d}{4}$$

$$= f(2a+2bi) + f(2c+2di)$$

$$\text{Ker } f = \left\{ 2a+2bi \in G \mid f(2a+2bi) = 0 \right\}$$

$$f(2a+2bi) = \frac{a-3b}{4} = 0 \Rightarrow a=3b \text{ bulunur.}$$

$$\text{Ker } f = \{ 6b+6bi \mid b \in \mathbb{Z} \}$$

4-) a)  $\langle 3 \rangle = \{ \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{0} \}$   $\langle 4 \rangle = \{ \bar{4}, \bar{8}, \bar{0} \}$

$$H_1 + H_2 = \{ 3n+4m \mid n, m \in \mathbb{Z} \} = \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{12} \text{ ve}$$

$$H_1 \cap H_2 = \{ \bar{0} \} \text{ olup } \mathbb{Z}_{12} = H_1 \oplus H_2 \text{ dir.}$$

→ Yada  $H_1 \cap H_2$  için  $\mathbb{Z}_{12}$  bütün elemanlarının  $H_1 + H_2$  şeklinde yazıldığını gösterirsiniz.

$$4-) b) \mathbb{Z}_{20}^* = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$H = \langle 3 \rangle = \{3, 9, 17, 1\} \quad H \text{ sonlu ve kapalı olup } H \leq \mathbb{Z}_{20}^*$$

$$H = \{3, 9, 17, 1\} \quad \text{ve } \mathbb{Z}_{20}^* \text{ deđ. olup } H \triangleleft \mathbb{Z}_{20}^* \text{ dir.}$$

$$11H = 13H = 17H = 19H \text{ olup } \mathbb{Z}_{20}^*/H = \{H, 11H\} \text{ bulunur.}$$

$$5- a) S_8$$

$$\alpha = (14)(568)(371)(123) = (1274)(3)(568)$$

$$o(\alpha) = \text{oketk}(4,3) = 12$$

$$\beta = (23)(347)(2567) = (256)(347) \quad o(\beta) = \text{oketk}(3,3) = 3$$

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = (143)(687) \text{ bulunur.}$$

$$b) \forall x, y \in G \text{ için}$$

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x^2 y^2 = xxyxy$$

$$\Rightarrow xyx = xxy \quad (\text{soldan } y^{-1} \text{ ile})$$

$$yx = xy \quad (\text{soldan } x^{-1} \text{ ile})$$

o halde deđiřmelidir.