2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI FEN-EDEB. FAK. MAT. BÖL. MAT 101 ANALİZ I DERSİ ARASINAV SORULARI

Cevap Anahtarı

06.12.2020

- **1.Soru 20 puan diğerleri 15'er puanlı olup süre 135 dakikadır.**
- **Saat 11:15'dan sonra gelen sınav belgeleri her ne sebeple olursa olsun kabul edilmeyecektir.**
- **Soruların çözümünü ayrıntılı bir şekilde yapınız.**
- **Adınızı, soyadınızı ve cevaplarınızı yazarken renkli kalem kullanınız.**
- **Sisteme göndermeden önce dosyayı kontrol ediniz. Sayfalar <u>dik</u> bir şekilde tek pdf dosyası olarak hazırlayıp yükleyiniz.**

1) Aşağıda verilen ifadelerin yanlarındaki boşluklara doğru (D) veya yanlış (Y) yazınız.

a) $f(x)=5$ fonksiyonu ne tek ne de çift fonksiyondur. Y

b) Her $x\in\mathbb{R}$ için $0<x$ ise $0<x^{-1}$ olur. D

c) Her $x\in\mathbb{R}$ için $x^{-1}\in\mathbb{R}$ olur. Y

d) $A\neq\varnothing$ olmak üzere $A\subset\mathbb{R}$ için $\sup A$ ve $\inf A$ sayıları vardır. Y

e) $A,B\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $\sup A=\sup B$ ve $\inf A=\inf B$ ise $A=B$ olur. Y

f) $A\neq\varnothing$ olmak üzere $A\subset\mathbb{R}$ için $\inf A=\sup A$ ise A kümesi tek elemanlıdır. D

g) $\{2\}=2$ dir. Y

h) $A=\{x \mid x \text{ bir tek tamsayıdır}\}$, $B=\{x \mid x^2-8x+15=0\}$ ise $B\subset A$ olur. D

$(x-3)(x-5)=0$

i) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ve $g(x)=x+1$ ise $f(x)=g(x)$ olur. Y

j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor. Her $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ için $x_1=x_2$ olduğunda $f(x_1)=f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu birebirdir. Y

2) Aşağıdaki ifadelerde verilen boşlukları doldurunuz.

a) $A,B\subset\mathbb{R}$ kümeleri için $A\cap B=\varnothing$ ise A ve B kümelerine ayrık kümeler denir.

b) $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-4x+2$ fonksiyonu için $\operatorname{Im}_f=$ $[2/3,9]$ ve $f(3)=$ yok olur.

$3\notin D_f$

c) $\arcsin(\sin 10)=$ $3\pi-10$

d) $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1<x<0 \\ x, & 0\le x<1 \end{cases}$ fonksiyonu için $D_f=$ $(-1,1)$ ve $\operatorname{Im}_f=$ $[0,1)$ olur.

e) $3-4\cos^2 x=0$ denklemi için çözüm kümesi $Ç.K=\left\{\pi/3+2k\pi,\ -\pi/3+2k\pi,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$ olur.

$f(x)=3x^2-4x+2=3\left[x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\right]=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]$ için

$-1\leq x\leq 2 \Rightarrow -\frac{5}{3}\leq x-\frac{2}{3}\leq\frac{4}{3} \Rightarrow 0\leq\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\leq\frac{25}{9} \Rightarrow$

$2/9\leq\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2/9\leq 3 \Rightarrow 2/3\leq 3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2/9\right]\leq 9 \Rightarrow$

$2/3\leq f(x)\leq 9$ olup $\operatorname{Im} f=[2/3,9]$ olur.

$f(3)=27-12+2=17$

$3 = 4\cos^2 x \Rightarrow \frac{3}{4} = \cos^2 x \Rightarrow$

$\cos x = \sqrt{3}/2 \ \vee \ \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

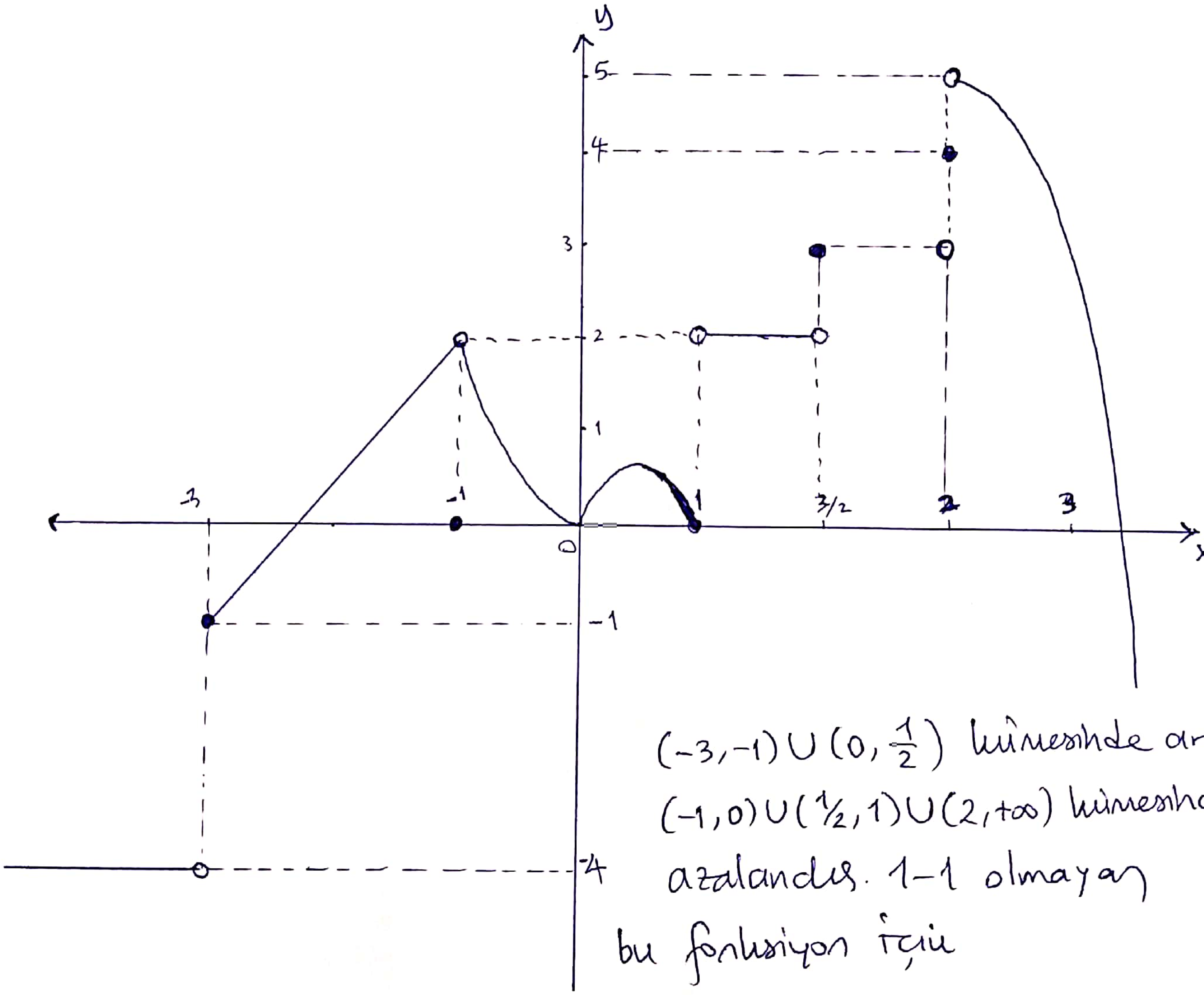
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ x = -\pi/3 + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \ ,$

$x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$

$Ç.K = \{ x \mid x = \mp \pi/3 + 2k\pi, \ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \}$

3) $f(x)=\begin{cases} -3+Sgnx, & x<-3 \\ \dfrac{3x+7}{2}, & -3\le x<-1 \\ 0, & x=-1 \\ |x^2-x|, & -1<x\le 1 \\ [\![2x]\!], & 1<x\le 2 \\ -(x-2)^2+5, & x>2 \end{cases}$

fonksiyonunun grafiğini çizip monotonluğunu inceleyiniz. Fonksiyon sınırlı mıdır, belirtiniz.



$(-3,-1)\cup(0,\frac{1}{2})$ kümesinde artan;
$(-1,0)\cup(\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$ kümesinde azalandır. 1−1 olmayan bu fonksiyon için $\forall x\in\mathbb{R}$ alındığında $f(x)\le 6$ olup f üstten sınırlıdır ama alttan sınırsızdır.

Ayrıca 1−1 değildir.

4) Her $n \in \mathbb{N}$ için $3^{6n} - 2^{6n} = 35k,\ k \in \mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.

$P(n): 3^{6n} - 2^{6n} = 35k$ olmak üzere

- $P(1): 3^6 - 2^6 = 729 - 64 = 665 = 35.19$ olup $P(1)$ doğrudur.

- $P(n): 3^{6n} - 2^{6n} = 35k$ doğru olsun.

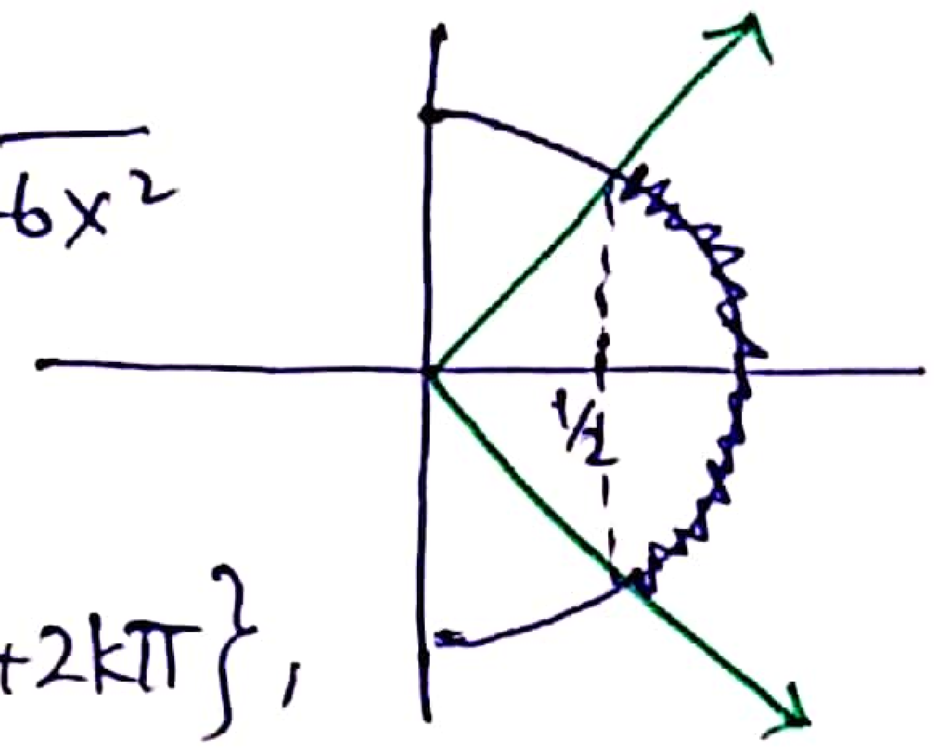
$P(n+1)$ için $\boxed{3^{6(n+1)} - 2^{6(n+1)} = 35.k' ?}$ doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$
\begin{aligned}
3^{6(n+1)} - 2^{6(n+1)} &= 3^{6n+6} - 2^{6n+6} \\
&= 3^{6n}.3^6 - 2^{6n}.2^6 \\
&= 3^{6n}.3^6 - 2^{6n}.3^6 + 2^{6n}.3^6 - 2^{6n}.2^6 \\
&= 3^6(3^{6n} - 2^{6n}) + 2^{6n}(3^6 - 2^6) \\
&= 3^6.(35k) + 2^{6n}.665 \\
&= 35.[\underbrace{3^6.k + 2^{6n}.19}_{k'}] \\
&= 35.k'
\end{aligned}
$$

olup tümevarım ile $P(n)$ önermesi $\forall n \in \mathbb{N}$ 'için doğrudur.

5) (a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

(b) $g(x)=\log_{x^2-4}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulup, tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.



(a) $f_1(x)=\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}$, $f_2(x)=\sqrt{6-35x-6x^2}$

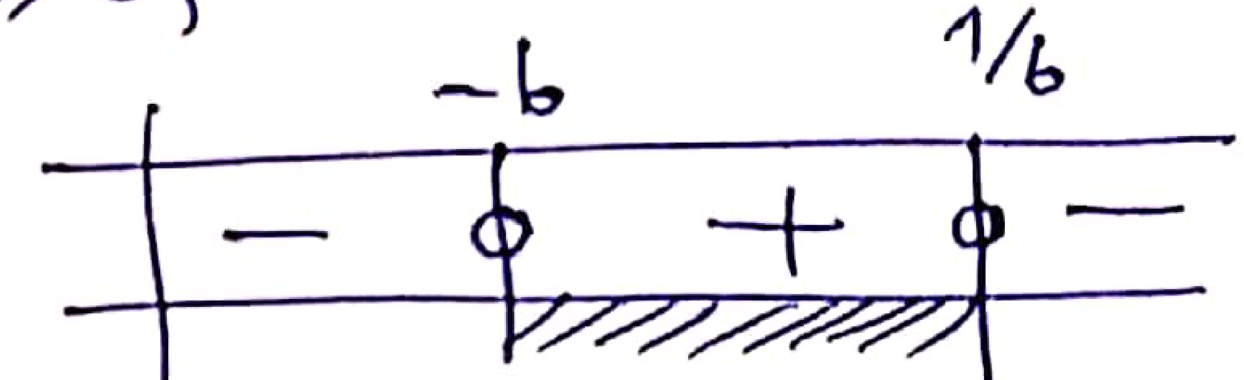
$D f_1=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x \geqslant \frac{1}{2}\}$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ -\pi/3+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}+2k\pi\}$,

$D f_2=\{x\in\mathbb{R}:\ 6-35x-6x^2 \geqslant 0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ -(6x-1).(x+6)\geqslant 0\}$

$=[-6,\frac{1}{6}]$



olup $D f=(D f_1\cap D f_2)\setminus\{x\in\mathbb{R}:\ 6-35x-6x^2=0\}$

$=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[-\pi/3+2k\pi,\ \pi/3+2k\pi]\cap(-6,\frac{1}{6})$

(b) $D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-4>0,\ x^2-4\neq 1,\ x+\sqrt{x^2+1}>0\}$

$=((-\infty,-2)\cup(2,+\infty))\setminus\{\mp\sqrt{5}\}$

$g(-x)=\log_{x^2-4}(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_{x^2-4}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\log_{x^2-4}\left(\dfrac{[\sqrt{x^2+1}-x][\sqrt{x^2+1}+x]}{[\sqrt{x^2+1}+x]}\right)$

$=\log_{x^2-4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\log_{x^2-4}(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$

$=-g(x)$ olur.

6) $f(x) = 6\cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)$ fonksiyonunun periyodunu bulup grafiğini çiziniz.

$f(x) = 6 \cdot \cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right)$ için $\forall x \in \mathbb{R}$ alındığında $-1 \leq \cos \dfrac{2\pi x}{3} \leq 1$ olup $-6 \leq f(x) \leq 6$ olur. $f(-x) = f(x)$ olduğundan f bir çift fonksiyondur. $T_f = \dfrac{2\pi}{2\pi/3} = 3$ olduğundan f-yi boyu 3 br olan bir aralıkta çizelim.

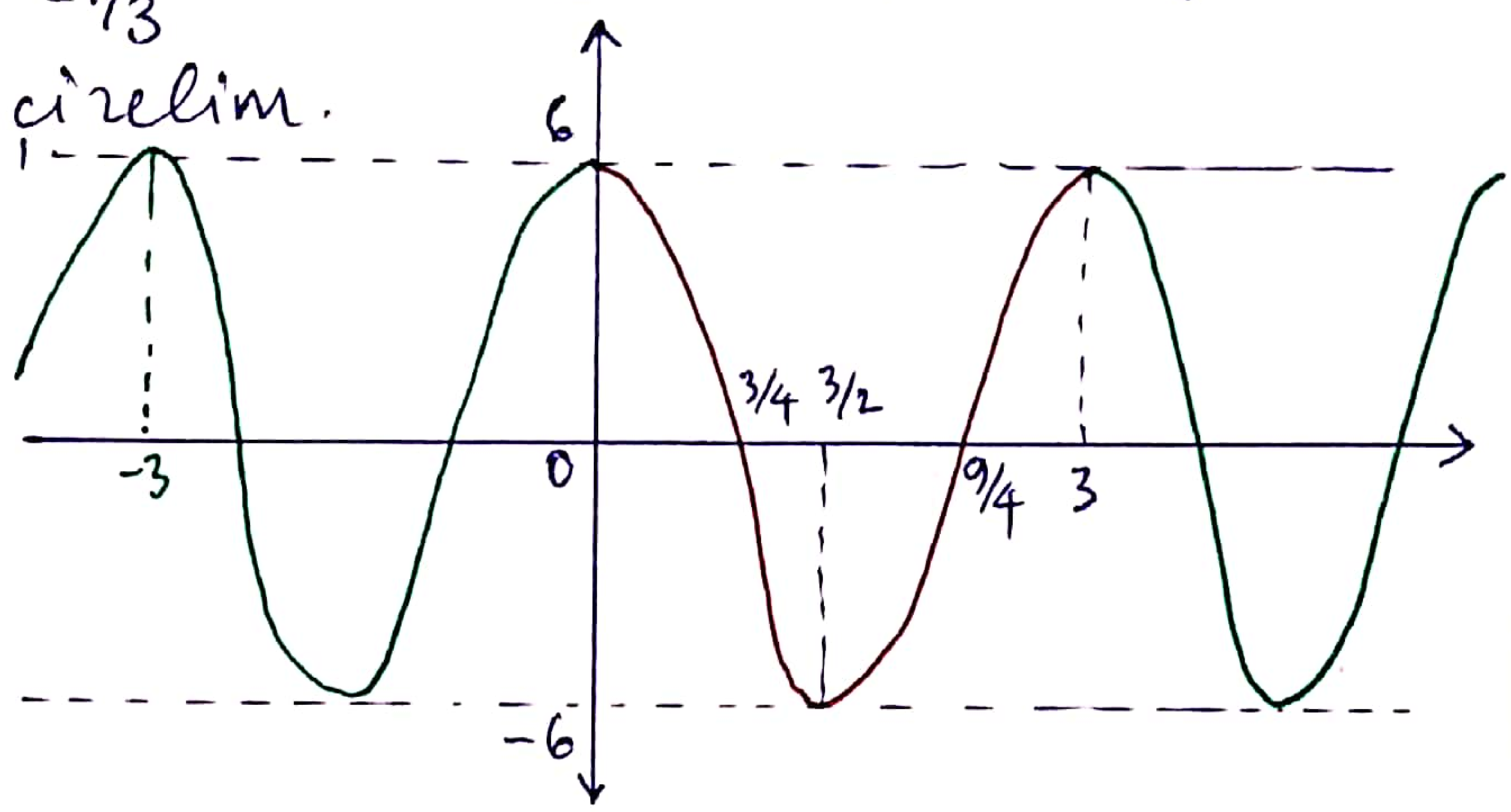
$x = 0$ için $f(0) = 6$

$x = 3/4$ için $f(3/4) = 0$

$x = 3/2$ için $f(3/2) = -6$

$x = 9/4$ " $f(9/4) = 0$

$x = 3$ için $f(3) = 6$



7) $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \sinh\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ olduğunu gösteriniz.

$x = u + v$
$y = u - v$ alalım. Buradan $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$ olup

$$\begin{aligned}
\cosh x - \cosh y &= \cosh(u+v) - \cosh(u-v) \\
&= \cancel{\cosh u . \cosh v} + \sinh u . \sinh v - \cancel{\cosh u . \cosh v} + \\
&\quad + \sinh u . \sinh v \\
&= 2 \sinh u . \sinh v \\
&= 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) . \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$