

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1. $\frac{y' - x\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
2. $x^2 y'' - \frac{y' - y}{x} - 2 = 0$ denkleminin sınıflandırmasına dair 5 özellik yazınız.
3. $y = c^2 x^2 - 1$ eğri ailesinin varsa zarfını bulunuz.
4. $(y')^2 - (2x + y)y' + x(x + y) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
5. Bir Clairaut denklemini yazınız ve genel çözümünü bulunuz.

Süre 90 dakikadır. Başarılar...

Doç. Dr. Fatma Hıra

(Cevaplar)

① $\frac{y' - x\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = 2 \rightarrow y' - x\sqrt{y} = 2\sqrt{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \{2 + x\}$

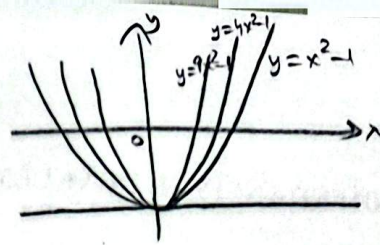
$\rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int (2 + x) dx$ değişkenine ayrılabilen denklemdir.
 $2\sqrt{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + C$ genel çözüm

② $x^2 y'' - \frac{y' - y}{x} - 2 = 0 \rightarrow x^2 y'' - y' + y = 2x$
 2M, 10, ~~4M~~, ~~4M~~, homojen olmayan denklemdir
 Yani 2. mertebe, 1. derece, ~~2. derece~~ katsayılı, homojen olmayan lineer denklemdir.

③ $g(x, y, c) = y - c^2 x^2 + 1 = 0$
 $\frac{\partial g}{\partial c} = -2cx^2 = 0 \rightarrow c = 0$ veya $x = 0$
 burada yazılırsa $y = -1$ (-teki) yeridir.

$y = -1$ teki çözüm mü? Bunun için eğri ailesinin dışı denki bulup
 $y = -1$ in çözüm olup olmadığı kontrol edilmelidir. Buna göre
 $y = c^2 x^2 - 1$ türev alırsa $y' = 2c^2 x \rightarrow c^2 = \frac{y'}{2x}$ için
 $y = \frac{y'}{2x} \cdot x^2 - 1 \rightarrow y = \frac{xy'}{2} - 1$ dışıdır
 olur. $y = -1$ için $y' = 0$ olup tutuklu yalvarına yazılırsa
 $-1 = \frac{x \cdot 0}{2} - 1 \Rightarrow -1 = -1$ sağlanır. O halde $y = -1$ teki çözüm
 olur. Zarf olması için $y = -1 \rightarrow y = c^2 x^2 - 1$ de yazılırsa $-1 = c^2 x^2 - 1$
 $\Rightarrow c^2 x^2 = 0 \rightarrow c^2 = 0 \rightarrow c = 0$ çift köklü olup $y = -1$ zarftır.

$$y = c^2 x^2 - 1 \quad \text{çgr' aileleri}$$



$y = -1$ doğrusu
parabollerin hepsine
teget oluyar. o nedenle
zerettir.

4) $(y')^2 - (2x+y)y' + x(x+y) = 0$

1M, 20. denklemdir. Ceparbina ayrılır

$$y'^2 - 2xy' - yy' + x^2 + xy = 0 \rightarrow (y' - x)^2 - y(y' - x) = 0$$

$$\Rightarrow (y' - x)(y' - x - y) = 0 \quad \text{olur}$$

bu göre $y' - x = 0$ ve $y' - x - y = 0$ olmalıdır. Bunu

• $y' - x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = x \rightarrow \int dy = \int x dx \quad \text{DA} \rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$

• $y' - x - y = 0 \rightarrow y' - y = x \quad \text{LD} \rightarrow \frac{dy}{dx} - y = x \rightarrow e^{-x} \frac{dy}{dx} - y e^{-x} = x e^{-x}$ için lineer

denklemin çözümünü

$$e^{-x} y = \int x \cdot e^{-x} dx + c$$

$$e^{-x} y = -x e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$y = -x - 1 + c e^x \quad \text{bulunur.}$$

$$\begin{array}{l} x \cdot e^{-x} \\ + \\ -e^{-x} \\ \hline \end{array} = e^{-x}$$

Bu göre (istenen parabolün)

$$(y - \frac{x^2}{2} - c)(y + x - 1 + c e^x) = 0 \quad \text{olur.}$$

5) $y = x y' + f(y')$ ve ya $y' = p$ için $y = x p + f(p)$ formundaki
denkleme Clairaut denklemini denir ve $p = c$ için

$y = x c + f(c)$ bu aileler genel çözümdür.

Clairaut denklemini

$$y = x p + p^2 \rightarrow y = x c + c^2$$

$$y = x p + e^{p-1} \rightarrow y = x c + e^{c-1}$$

$$y = x p + \frac{1}{3-p} \rightarrow y = x c + \frac{1}{3-c}$$

$$y = x p + \sin p \rightarrow y = x c + \sin c$$