

Adı Soyadı :
Numara :

Cevap Anahatı

18.11.2025

MAT 301 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I ARASINAV SORULARI

- SORU 1:** $P_0 = (1,1,1), P_1 = (1,2,3), P_2 = (3,2,1), P_3 = (0,2,2)$ olmak üzere
- $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta cümlesinin $\mathbb{R}^3$ de bir afin çatı olduğunu gösteriniz.
 - P_0 başlangıç noktası olmak üzere $Q = (3,4,1)$ noktasında $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ afin çatısına göre koordinatlarını yazınız.
- SORU 2:** $\vec{V} = (2,2,-1) \in \mathbb{R}^3$, $P = \left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right) \in E^3$ verilsin. $f = x_1^2 \cos x_2 + x_3^2 + \sin x_1$ fonksiyonu için $\vec{V}_P[f]$ yi bulunuz.
- SORU3:** $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y = 2x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \in \chi(E^3)$ vektör alanları veriliyor. $Y - x_1 X$ vektör alanını bulunuz ve $P = (-1,0,2)$ noktasındaki değerini hesaplayınız.
- SORU 4:** $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $\forall \vec{v}_p \in T_{E^n}(P)$ için
- $$\vec{v}_p[fg] = g(p) \vec{v}_p[f] + f(p) \vec{v}_p[g]$$
- olduğunu gösteriniz.
- SORU5:** E^n de $d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$
- şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonun bir metrik olduğunu gösteriniz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Diferansiyel Geometri I Ara Sınav

Cevap Anahtarı

1) $\overrightarrow{P_0P_1} = (0, 1, 2)$

$\overrightarrow{P_0P_2} = (2, 1, 0)$

$\overrightarrow{P_0P_3} = (-1, 1, 1)$

$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ baz mı?

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ lineer bağımsız. 3 boyutlu uzayda üç vektör lineer bağımsız olduğundan germe sağlar. Yani $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ bazdır.

Dolayısıyla $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$, $\mathbb{R}^3$ de bir afın cahdır.

b) $\theta = (3, 4, 1)$

$\overrightarrow{P_0\theta} = (2, 3, 0)$

$(2, 3, 0) = a \cdot (0, 1, 2) + b \cdot (2, 1, 0) + c \cdot (-1, 1, 1)$

$a = -1$

$b = 2$

$c = 2$

$\Rightarrow \begin{aligned} x_1(\theta) &= -1 \\ x_2(\theta) &= 2 \\ x_3(\theta) &= 2 \end{aligned} \quad (-1, 2, 2) \neq$

2) $\overline{V_P[f]} = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_P = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_P + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_P + v_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_P$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 2 \quad -1$

$2 \cdot (2x_1 \cos x_2 + \cos x_1) \Big|_P + 2 \cdot (-x_1^2 \sin x_2) \Big|_P - 1 \cdot 2x_3 \Big|_P$

$= 4 \cdot \underbrace{x_1(P)}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\cos x_2(P)}_0 + \underbrace{\cos x_1(P)}_{\frac{\pi}{2}} - 2 \cdot \underbrace{x_1^2(P)}_{\frac{\pi^2}{2}} \cdot \underbrace{\sin x_2(P)}_0 - 2 \cdot \underbrace{x_3(P)}_{\frac{\pi}{2}}$

$= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi - \pi = \boxed{\pi}$

$$3) \quad Y - x_1 X$$

$$= \left(2x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right) - x_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$= 2x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} - x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$= x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$(Y - x_1 X)(p) = \left(x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Big|_p$$

$$= x_1^2(p) \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p - \cancel{x_1(p) x_2(p)} \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p - \frac{\partial}{\partial x_3} \Big|_p$$

$$= \left(1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p - \frac{\partial}{\partial x_3} \Big|_p \right)$$

$$= (1, 0, -1) \Big|_p \quad \#$$

Soru 4 ve Soru 5 için defter bakınız.