Ad Soyad:

Numara: **22.06.2026**

LİNEER CEBİR II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(x+y, y+z, x-z)$ lineer dönüşümü verilsin.

a) Lineer dönüşümün çekirdeğini ve rankını bulunuz.

b) Boyut teoremini doğrulayınız.

2. $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı bir $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin $\lambda_1 = 3$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü $v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2=-1$ öz değerine karşılık gelen bir özvektörü $v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ olduğu bilinmektedir. Buna göre A matrisini (yani a,b,c,d değerlerini) bulunuz.

3. $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \to L(x,y,z)=(2x-y+z, x+y-3z)$ ile tanımlanan lineer dönüşüm olsun. Sırasıyla $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ uzaylarının $S=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ ve $T=\{(1,\ 3),\ (3,\ 1)\}$ tabanlarına göre L lineer dönüşümünün temsil matrisini bulunuz.

4. $\{u_1=(1,-1,1), u_2=(2,0,-1), u_3=(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ kümesi için

a) Lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

b) Gram-Schmidt yöntemini kullanarak ortonormal küme elde edinir.

5. V bir iç çarpım uzayı , $\{u_1,u_2,\dots,u_n\} \subset V$ ise ortonormal küme ve $v \in V$ olsun.

$$u = v - \langle v,u_1\rangle u_1 - \langle v,u_2\rangle u_2 - \dots - \langle v,u_n\rangle u_n$$

vektörü $u_1,u_2,\dots,u_n$ vektörlerinin herbirine ortogonaldir. Gösteriniz.

BAŞARILAR

Süre: 75 dk

Doç. Dr. Fatma GÜLER

Lineer Cebir

Cevap Anahtarı

1) $T(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ x-z)$

a) $T(x,y,z) = (0,0,0)_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-x \\ z=x \end{array}$

$(x,y,z) = (x,-x,x) = x(1,-1,1)$, $\{(1,-1,1)\}$ sistemi lineer bağımsız ve germeyi sağlar.

O halde, $\text{Çek}\,T = sp\{(1,-1,1)\} \Rightarrow \text{boy Çek}\,T = 1$

Rankını bulalım: Lineer dönüşümün standart matrisini yazıp indirgeyelim:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup rank = 2 dir.

b) $\text{rank}\,T + \underbrace{\text{sıfırlık}\,T}_{1} = \underbrace{\text{boy}\,\mathbb{R}^3}_{3} \Rightarrow \text{rank}\,T = 2$ oldu

Yani boyut teoremi sağlandı.

2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a+b=3 \\ c+d=3 \end{array}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a-2b=-1 \\ c-2d=2 \end{array}$

Çözelim:

$a = \frac{5}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad c = \frac{8}{3}, \quad d = \frac{1}{3}$

olup $A = \begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 8/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ bulunur.

3) $L(1,1,1) = (2,-1) = a.(1,3) + \beta.(3,1)$

$L(1,1,0) = (1,2) = c.(1,3) + k.(3,1)$ olup $L_{ST} = \begin{bmatrix} a & c & m \\ \beta & k & n \end{bmatrix}$

$L(1,0,0) = (2,1) = m.(1,3) + n.(3,1)$

olup

$L_{ST} = \begin{bmatrix} -5/8 & 5/8 & 1/8 \\ 7/8 & 1/8 & 5/8 \end{bmatrix}$ #

CamScanner ile tarandı

4)

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır

b) Ortogonal küme $\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun.

$$v_1 = u_1 = (1, -1, 1)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \left(\frac{3}{14}, \frac{9}{14}, \frac{6}{14}\right)$$

Ortonormal kümesi $\{k_1, k_2, k_3\}$ olsun.

$$k_1 = \|v_1\| = 1/\sqrt{3}\,(1, -1, 1)$$

$$k_2 = \|v_2\| = \frac{1}{\sqrt{42}}(5, 1, -4)$$

$$k_3 = \|v_3\| = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 3, 2)$$

5) Notlara bakınız.