Ad Soyad:

Numara: Cevap Anahtarı **01.06.2026**

LİNEER CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

1. $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \to A(x,y) = (2x+2y, 2x, 2y-2x)$

a) $(-1,1) \in$ Çek$A$ mıdır? Açıklayınız.

b) $(3,0,2) \in A(\mathbb{R}^2)$ midir? Açıklayınız.

c) Çek$A$ uzayının bir bazını bulunuz.

d) A lineer dönüşümünün görüntü uzayının bazını bulunuz.

e) Çek$A$ ve $A(\mathbb{R}^2)$ uzaylarının boyutlarını bulunuz.

f) A lineer dönüşümü 1-1 ve örten midir? Açıklayınız.

2. $L:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ lineer dönüşüm olsun. Aşağıdakileri cevaplayınız.

a) boy(Çek$L$) $= 3 \Rightarrow$ boy $L(\mathbb{R}^5) = ?$

b) boy($L(\mathbb{R}^5)$) $= 4 \Rightarrow$ boy(Çek$L$) $= ?$

3. $\alpha_1 = (1,2,0)$, $\alpha_2 = (0,5,7)$, $\alpha_3 = (-1,1,3) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri verilsin.

a) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ vektör sisteminin $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir baz oluşturduğunu gösteriniz.

b) $\beta = (0,13,17)$ vektörü için $\beta \in sp\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olduğunu gösteriniz.

4. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to T(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$ lineer dönüşümünün özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

5. U ve V bir F cismi üzerinde vektör uzayları olsun. $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ U nun bir bazı, $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ olsun. $i = 1,2,...,n$ için $L(u_i) = v_i$ olacak şekilde tek bir $L:U \to V$ lineer dönüşümü vardır, gösteriniz.

BAŞARILAR

Süre: 75 dk

Doç. Dr. Fatma GÜLER

Lineer Cebir II Final Sınavı

Cevap Anahtarı

1) $A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \to A(x,y) = (2x+2y,\ 2x,\ 2y-2x)$

a) $A(-1,+1) \neq (0,0,0)$ old $(-1,1) \notin \text{Çek}A$

b) $(2x+2y,\ 2x,\ 2y-2x) = (3,0,2)$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x+2y=3 & y=\frac{3}{2} \\ x=0 & \\ 2y=2 & y=1 \end{array}\right\} \neq \text{ O halde } (3,0,2) \notin A(\mathbb{R}^2)$$

c) $\text{Çek}A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A(x,y) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \{(0,0)\}$ bulunur.

d) $A(x,y) = (2x+2y,\ 2x,\ 2y-2x)$

$= x(2,2,-2) + y(2,0,2)$ olup $A(\mathbb{R}^2) = sp\{(2,2,-2),(2,0,2)\}$

yazılır. Ayrıca $\{(2,2,-2), (2,0,2)\}$ lineer bağımsız $\left(c_1(2,2,-2) + c_2(2,0,2) = 0 \text{ ise } c_1 = c_2 = 0\right)$

olduğundan $A(\mathbb{R}^2)$ nin bazıdır.

e) $\text{boy}(\text{Çek}A) = 0$

$\text{boy}(A(\mathbb{R}^2)) = 2$

f) $\text{boy}(\text{Çek}A) = 0 \Leftrightarrow A$ 1-1 dir. O halde A 1-1.

$\text{rank}A = \text{boy}(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow A$ örtendir.

$$\underbrace{\text{boy}(A(\mathbb{R}^2))}_{2} = \underbrace{\text{boy}(\mathbb{R}^3)}_{3}$$

$2 \neq 3$ olup A örten değil.

2)

a) $boy(\text{Çek } L) = 3$

$$\underbrace{\text{rank} L}_{boy(L(\mathbb{R}^5))} + \underbrace{\text{sıfırlık } L}_{3} = \underbrace{boy(\mathbb{R}^5)}_{5} \quad \Rightarrow \text{rank} L = boy(L(\mathbb{R}^5)) = 2$$

b) $boy(L(\mathbb{R}^5)) = 4$

$$\underbrace{\text{rank} L}_{4} + \underbrace{\text{sıfırlık } L}_{?} = \underbrace{boy(\mathbb{R}^5)}_{5} \quad \Rightarrow \text{sıfırlık } L = boy(\text{Çek } L) = 1 \ \#$$

3) a) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ lineer bağımsız mı?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{lineer bağımsız}$$

üç boyutlu uzayda üç vektör lineer bağımsız ise germe sağlanır.

Yani $sp\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ sağlanır. O halde $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bazıdır.

b) $(0, 13, 17) = c_1(1,2,0) + c_2(0,5,7) + c_3(-1,1,3)$

$c_1 = 1$

$c_2 = 2$

$c_3 = 1$ olup yani $\beta \in sp\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ dır.

4) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to T(x,y,z) = (2x+y,\ y-z,\ 2y+4z)$

$T(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ olmalı

$T(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$(2x+y,\ y-z,\ 2y+4z) = (\lambda x\ \lambda y,\ \lambda z)$

$2x+y = \lambda x$
$y-z = \lambda y$
$2y+4z = \lambda z$

lineer denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin deti sıfır olmalı

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}$$ öz değerleri bulunur.

$\lambda_1 = 2$ öz değerine karşılık gelen öz vektör

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Karşılık gelen öz vektör

$0.x + y + 0.z = 0 \Rightarrow y = 0$

$-y - z = 0$ $\quad y = -z = 0$

$x = t,\ t \neq \vec{0}$

$(x,y,z) = (t,0,0) = t\,(1,0,0)$, $t \neq \vec{0}$, $t \in \mathbb{R}$.

Benzer şekilde
$\lambda_3 = 3$ için öz vektör $(1,1,-2)$ dir.

5) Cevap için deftere bakınız.