2023-2024 Eğitim Öğretim Yılı - MAT 312 Nümerik Analize Giriş Bütünleme Sınavı

1. $f(x)=x^3-2x-5$ fonksiyonunun $[2,3]$ aralığında ki kökünü Bolzana'nın ikiye bölme (yarılama) yöntemi ile 6 iterasyonda virgülden sonra 4 basamak alarak yaklaşık olarak bulunuz.

2. $\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 2x+y-3z=0 \\ x+2y-z=2 \end{array}$ denklem sistemini Gauss-Eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

3. $f(x)$ fonksiyonu $0,1,2$ değerlerine karşılık sırasıyla $-4,-2,2$ değerlerini alsın. Buna göre 2. dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu kurup $x=3$ noktasında ki fonksiyonun değerini hesaplayınız.

4. $f(x_0)$ fonksiyonun ikinci mertebeden türevini yaklaşık olarak veren geri fark formülünü ikinci mertebeden hata ve dört noktada tanımlı olmak kaydıyla oluşturunuz.

Sınav süresi 90 dakikadır. Başarılar. 17.7.2024

CEVAPLAR

1) $f(x)=x^3-2x-5$ $\quad r_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}\cong$ kök

iterasyon	n	a_n	b_n	r_n	$f(r_n)$
1	0	2	3	2,5	+
2	1	2	2,5	2,25	+
3	2	2	2,25	2,125	+
4	3	2	2,125	2,0625	−
5	4	2,0625	2,125	2,0937	−
6	5	2,0937	2,125	2,1093	

Yaklaşık kök $=2,1093$

2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$z=1,\quad y-\frac{5}{3}z=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=1$

$x-y+z=1 \Rightarrow x=1$

3)

i	x_i	y_i
0	0	-4
1	1	-2
2	2	2

$$P_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{-1.\ -2} \cdot -4 + \frac{x(x-2)}{1.\ -1.} -2 + \frac{x(x-1)}{2.1} \cdot 2$$

$$= -2(x^2-3x+2) + 2(x^2-2x) + x^2-x$$

$$= -2x^2+6x-4+2x^2-4x+x^2-x = x^2+x-4 \Rightarrow P_2(3) = 8$$

4) $f''(x_0) = a f(x_0) + b f(x_0-h) + c f(x_0-2h) + d f(x_0-3h)$

$= a f(x_0) + b\left[f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + O(h^4)\right]$

$+ c\left[f(x_0) - 2h f'(x_0) + \frac{4h^2}{2} f''(x_0) - \frac{8h^3}{6} f'''(x_0) + O(h^4)\right]$

$+ d\left[f(x_0) - 3h f'(x_0) + \frac{9h^2}{2} f''(x_0) - \frac{27h^3}{6} f'''(x_0) + O(h^4)\right]$

$a+b+c+d=0$

$-b+2c+3d=0$

$b+4c+9d=\frac{2}{h^2}$

$b+8c+27d=0$

$\Rightarrow$

$a=\frac{2}{h^2}$, $b=-\frac{5}{h^2}$, $c=\frac{4}{h^2}$, $d=-\frac{1}{h^2}$

$$f''(x_0) = \frac{2f(x_0) - 5f(x_{-1}) + 4f(x_{-2}) - f(x_{-3})}{h^2}$$