1	2	3	4	Toplam

Adı Soyadı: 01.07.2024
Numarası:

2023-2024 SOYUT MATEMATİK II FİNAL SINAV SORULARI

1) (10p) a) $x = [5,2]$ sayısı veriliyor. Buna göre $x^3 + 2x + 2$ sayısını hesaplayınız.

(15p)b) x, y, z birer tam sayı ve $x \neq 0$ olsun. $xy = xz$ ise $y = z$ olduğunu gösteriniz.

2) (15p) İki negatif rasyonel sayının toplamlarının da negatif olduğunu gösteriniz.

3) (12p)a) γ bir Dedekind kesimi olmak üzere $1^*\gamma = \gamma$ olduğunu gösteriniz.

(18)b) 5^* kümesinin bir kesim olduğunu gösteriniz ve bu kümenin supremumunu bulunuz.

4) (15p) a) $A = \{1, 3, 11, 31, 69, 131, \ldots\}$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını sayılabilirlik tanımını kullanarak gösteriniz.

(15p) b) $C = \{\frac{1}{k} : k^3 - 6k^2 + 11k - 6 \neq 0, k \in \mathbb{N}^*\}$ kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu gösteriniz.

Başarılar
Dr. Çağla Çelemoğlu

Cevap Anahtarı

1) a) $x = [5,2] \Rightarrow x^2 = [5,2] \odot [5,2] = [29,20]$
$x^3 = [29,20] \odot [5,2] = [185,158]$

$2x = x + x = [5,2] \oplus [5,2] = [10,4]$
$2 = [2,0]$ yazılırsa

$x^3 + 2x + 2 = [185,158] + [10,4] + [2,0]$
$= [197,162]$

1 b) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ise $x = [a,b]$, $x \neq 0 \Rightarrow a \neq b$ olur.
$y = [c,d]$
$z = [e,f]$

olsun. $xy = xz \Rightarrow [a,b][c,d] = [a,b][e,f]$

$\Rightarrow [ac+bd, ad+bc] = [ae+bf, af+be]$

$\Rightarrow ac+bd+af+be = ad+bc+ae+bf$

$\Rightarrow a(c+f)+b(d+e) = b(c+f)+a(d+e)$

$\Rightarrow (a-b)(c+f) = (a-b)(d+e)$

$a \neq b$ old. $a-b \neq 0$
$\Rightarrow c+f = d+e$

$\Rightarrow [c,d] = [e,f]$

$\Rightarrow y = z$

2) m ve n iki rasyonel sayı ve negatif olsun.

$m = [(a,b)] = \frac{a}{b}$
$n = [(c,d)]$ olsun. $m < 0 \Rightarrow ab < 0$ olur Biz
$n < 0 \Rightarrow cd < 0$

$m+n$ yani $[(ad+bc, bd)] < 0$ olduğunu göstermeliy
Yani $(ad+bc)(bd) < 0$ olduğunu göstermeliyiz

$(ad+bc)(bd) = \underbrace{ab}_{<0}\underbrace{d^2}_{>0} + \underbrace{b^2}_{>0}\underbrace{cd}_{<0}$ olup iki negatif

tam sayının toplamı da negatif olduğundan

$(ad+bc)(bd) < 0$ bulunur. Yani $[(a,b)]+[(c,d)] <$

1	2	3	4	Toplam

Adı Soyadı: 01.07.2024

Numarası:

2023-2024 SOYUT MATEMATİK II FİNAL SINAV SORULARI

1) (10p) a) $x = [5,2]$ sayısı veriliyor. Buna göre $x^3 + 2x + 2$ sayısını hesaplayınız.

(15p)b) x, y, z birer tam sayı ve $x \neq 0$ olsun. $xy = xz$ ise $y = z$ olduğunu gösteriniz.

2) (15p) İki negatif rasyonel sayının toplamlarının da negatif olduğunu gösteriniz.

3) (12p)a) γ bir Dedekind kesimi olmak üzere $1^* \gamma = \gamma$ olduğunu gösteriniz.

(18)b) 5^* *kümesinin bir kesim olduğunu gösteriniz ve bu kümenin supremumunu bulunuz.*

4) *(15p) a)* $A = \{1, 3, 11, 31, 69, 131, \ldots\}$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını sayılabilirlik tanımını kullanarak gösteriniz.

(15p) b) $C = \{\frac{1}{k} : k^3 - 6k^2 + 11k - 6 \neq 0, k \in \mathbb{N}^*\}$ kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu gösteriniz.

Başarılar
Dr. Çağla Çelemoğlu

Cevap Anahtarı

1) a) $x = [5,2] \Rightarrow x^2 = [5,2] \odot [5,2] = [29,20]$

$x^3 = [29,20] \odot [5,2] = [185,158]$

$2x = x + x = [5,2] \oplus [5,2] = [10,4]$

$2 = [2,0]$ yazılırsa

$x^3 + 2x + 2 = [185,158] + [10,4] + [2,0]$

$= [197,162]$

1 b) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ise $x = [a,b]$, $x \neq 0 \Rightarrow a \neq b$ olur.
$y = [c,d]$
$z = [e,f]$

olsun. $xy = xz \Rightarrow [a,b][c,d] = [a,b][e,f]$

$$\Rightarrow [ac+bd,\ ad+bc] = [ae+bf,\ af+be]$$

$$\Rightarrow ac+bd+af+be = ad+bc+ae+bf$$

$$\Rightarrow a(c+f)+b(d+e) = b(c+f)+a(d+e)$$

$$\Rightarrow (a-b)(c+f) = (a-b)(d+e)$$

$a \neq b$ old. $a-b \neq 0$

$$\Rightarrow c+f = d+e$$

$$\Rightarrow [c,d] = [e,f]$$

$$\Rightarrow y = z$$

2) m ve n iki rasyonel sayı ve negatif olsun.

$m = [(a,b)] = \frac{a}{b}$

$n = [(c,d)]$ olsun. $m < 0 \Rightarrow ab < 0$ olur Biz
$n < 0 \Rightarrow cd < 0$

$m+n$ yani $[(ad+bc,\ bd)] < 0$ olduğunu göstermeliyi

Yani $(ad+bc)(bd) < 0$ olduğunu göstermeliyiz

$$(ad+bc)(bd) = \underbrace{ab}_{<0}\underbrace{d^2}_{>0} + \underbrace{b^2}_{>0}\underbrace{cd}_{<0}$$ olup iki negatif

tam sayının toplamı da negatif olduğundan

$(ad+bc)(bd) < 0$ bulunur. Yani $[(a,b)]+[(c,d)] < 0$

3) a) γ bir kesim olsun. $1^*.\gamma=\gamma$ old gösterelim

Keyfi bir $x\in 1^*.\gamma$ alalım. O halde

$x=pq$ o.ş $p\in 1^*$, $q\in\gamma$ vardır

$\Rightarrow x=pq$ o.ş $p<1$, $q\in\gamma$

$\Rightarrow x=pq<q$ olup $q\in\gamma$ ve γ kesim old. K2 ge[reği]

$\Rightarrow x\in\gamma$ bulunur

$1^*.\gamma \subseteq \gamma$ ---(1)---

Tersine keyfi bir $y\in\gamma$ alalım. γ kesim K3 gereği $s>y$ o.ş $s\in\gamma$ vardır Buradan $\frac{y}{s}<1$ olup $p=\frac{y}{s}$ alın[ırsa] $p\in 1^*$ olur ve $y=ps\in 1^*.\gamma$ bulunur

$\gamma \subseteq 1^*.\gamma$ ---(2)--- (1) ve (2) den istene[n] eşitlik elde edilir

b) $5^*=\{x\in\mathbb{Q} \mid x<5\}$ kümesinin bir kesim old. gösterelim.

K1) $5^*\neq\emptyset$: $4\in 5^*$ olup $5^*\neq\emptyset$

$5^*\neq\mathbb{Q}$: $5\notin 5^*$ ve $5\in\mathbb{Q}$ olup $5^*\neq\mathbb{Q}$

K1 sağlanır

K2) $x\in 5^*$ ve $y<x$ olsun. $x\in 5^*\Rightarrow x<5$ olup kesimler kümesi kısmi sıralı old. geçişme öz[elliği] $y<5$ olup $y\in 5^*$ dır. K2 sağlanır.

K3) $EBE(5^*)$ olmadığını gösterelim Aksini kabul edelim. $EBE(5^*)$ var ve r olsun. O halde $r\in 5^*$ olup $r<5$ tir. $r<5 \Rightarrow 2r<r+5 \Rightarrow r<\frac{r+5}{2}$ ($\sup 5^*=5$)

$r<5 \Rightarrow r+5<10 \Rightarrow \frac{r+5}{2}<5$ olur

Yani $\frac{r+5}{2}\in 5^*$ olan r den daha büyük eleman vardır Bu durum $EBE(5^*)=r$ olması ile çelişir O halde $EBE(5^*)$ yoktur. K3 sağlanır. 5^* bir kesimdir

4 a) $A = \{1, 3, 11, 31, 69, 131, \dots\}$

$= \{n^3+n+1 \ , n \in \mathbb{N}\}$ ile yazılır

Bu kümenin sayılabilir olup olmadığına bakalım.

$f: \mathbb{N} \to A$

$n \to f(n) = n^3+n+1$ olsun.

f kapalıdır: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n)$

f iyi tanımlıdır: $n_1 = n_2$ o.ş $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ alalım.

$\Rightarrow n_1^3+n_1+1 = n_2^3+n_2+1$

$\Rightarrow f(n_1) = f(n_2)$ olup sağlanır f bir fonksiyondur

f birebirdir: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için $f(n_1) = f(n_2)$ olsun

$\Rightarrow n_1^3+n_1+1 = n_2^3+n_2+1$

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ old.

$\Rightarrow n_1^3+n_1 = n_2^3+n_2$

$\Rightarrow n_1^3 - n_2^3 = n_2 - n_1$

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ old.

$\Rightarrow n_1^2+n_1n_2+n_2^2 = -1$ olamaz. O halde tek ihtimal

$\Rightarrow n_1 = n_2$ olmasıdır

f örtendir: $\forall x \in A$ için $x = n^3+n+1$ o.ş $n \in \mathbb{N}$ old.

örtenlik açıktır.

$A \approx \mathbb{N}$ olup A sayılabilir sonsuzdur yani

sayılabilirdir.

b) Sayılabilir sonsuz bir kümeden sonlu bir alt küme çıkarıldığında kalan kümenin yine sayılabilir sonsuz old. biliyoruz. O halde

$A = \{ \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^* \}$ kümesini ele alalım. $f: \mathbb{N} \to A$ ya

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $f(k) = \frac{1}{k}$ olup $\mathbb{N} \approx A$ old. biliyoruz

$k^3-6k^2+11k-6=0$ alınırsa $(k-1)(k-2)(k-3)=0$

olup $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ alalım. Bu durumda

$C = A-B$ olarak elde edilen yani C kümesi

sayılabilir sonsuzdur.

Scanned with CamScanner