2023-2024 GÜZ DÖNEMİ OMÜ-FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOPOLOJİYE GİRİŞ FİNAL SINAVI

10 Şubat 2024 Saat: 15:00

S1) Boş bırakılmış yerleri uygun ifadelerle doldurunuz (20 puan).

i. $B(x,r)=\{y:d(x,y)<r\}$ alt kümesi metrik uzayda AÇIK YUVAR tanımıdır.

ii. Alışılmış reel uzayda $A=[0,1)\cup\{2\}$ alt kümesi için A nın yığılma noktalarının kümesi $A'=[0,1]$ dir.

iii. (X,τ) topolojik uzayında A alt kümesine ait bir x noktası A nın yığılma noktası değilse x noktasına A nın bir İZOLE NOKTA denir.

iv. $(X,P(X))$ topolojik uzayı X üzerinde EN İNCE yapılı(dokulu), $(X,\tau=\{X,\varnothing\})$ topolojik uzayı da X üzerinde EN KABA yapılı(dokulu) topolojidir.

S2) (X,d) bir metrik uzay ve $\varnothing\neq A\subset X$ olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$$

olduğunu gösteriniz(20 puan).

ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned}
d(x,A) &= \inf\{d(x,a):a\in A\}\\
&\le \inf\{d(x,y)+d(y,a):a\in A\}\\
&\le d(x,y)+\inf\{d(y,a):a\in A\}\\
&= d(x,y)+d(y,A)\\
d(x,A)-d(y,A) &\le d(x,y) \qquad\qquad (\mathrm{I})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(y,A) &= \inf\{d(y,a):a\in A\}\\
&\le \inf\{d(y,x)+d(x,a):a\in A\}\\
&\le d(y,x)+\inf\{d(x,a):a\in A\}\\
&= d(x,y)+d(x,A)\\
d(y,A)-d(x,A) &\le d(x,y) \qquad\qquad (\mathrm{II})
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (I) ve (II) göz önüne alınırsa,

$$|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$$

sağlandığı gösterilir.

S3) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \left| x^2 - y^2 \right|$$

ile tanımlı d fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik midir? Metrikse metrik olma şartlarının sağlandığını gösteriniz, metrik değilse hangi şartın sağlanmadığına dair bir örnek veriniz(15 puan).

ÇÖZÜM: d fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik DEĞİLDİR. Çünkü, $x = 1$ ve $y = -1$ için $d(x, y) = 0$ olur ancak $x \neq y$ dir.

S4) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ topolojisi olsun. $A = \{b, c, d\}$ kümesinin içini, dışını, yığılma noktalarının kümesini, kapanışını ve sınırını bulunuz (25 puan).

ÇÖZÜM:

- $A^{\circ} = \bigcup \{G \subset A : G \in \tau\} = \varnothing \bigcup \{c, d\} = \{c, d\}$
- $\text{dış}A = X / \overline{A} = \left(A^{c}\right)^{\circ} = \{a, e\}^{\circ} = \{a\}$
- $x \in A' \Leftrightarrow \forall N \in N(x), \left[N - \{x\}\right] \bigcap A \neq \varnothing$ olmalıdır. $A' = \{b, c, d, e\}$
- $\overline{A} = A \bigcup A' = \{b, c, d, e\}$
- $\partial A = \overline{A} / A^{\circ} = \{b, e\}$

S5) τ_1 ve τ_2 boş kümeden farklı X kümesi üzerinde iki topoloji ise $\tau_1 \cup \tau_2$ de bir topoloji olur mu? Açıklayınız (20 puan).

ÇÖZÜM:

$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ve $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{c\}\}$ topolojileri olsun.

$\tau_1 \bigcup \tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$ bir topoloji belirtmez. Çünkü $\{b\} \bigcup \{c\} = \{b, c\} \notin \tau_1 \bigcup \tau_2$ dir.