

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	Toplam

Adı Soyadı:

20.11.2025

Numara:

MAT 469 ÖLÇÜM TEORİSİ DERSİ ARA SINAV SORULARI

ve ÇÖZÜMLERİ

1) $F_n = \begin{cases} S; n \text{ çift ise} \\ T; n \text{ tek ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlanan (F_n) küme dizisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

2) $X = \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{Z} : A \text{ ya da } A^c \text{ sonlu}\}$ olarak tanımlanıyor.

a) $\mathcal{M}$ 'nin $\mathbb{Z}$ üzerinde bir cebir olduğunu fakat σ -cebiri olmadığını gösteriniz.

b) $A = \left\{ \left\lfloor \frac{5}{x} \right\rfloor : 1 < x, x \in \mathbb{R} \right\}$ kümesi $\mathcal{M}$ 'ye ait midir? Neden?

3) $\mathbb{R}^2$ de $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{R}^2 : (u, v) \in A \text{ ise } (-u, -v) \in A\}$ olarak tanımlanıyor.

a) $\mathcal{M}$ 'nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir σ -cebiri olduğunu gösteriniz.

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^4$ olarak tanımlanıyor. f fonksiyonu ölçülebilir midir? Neden?

4) Ölçülebilir fonksiyon tanımını yapınız. f, g ölçülebilir reel değerli fonksiyon ise $f + g, f \cdot g$ fonksiyonlarının da ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

5) $(X, \mathcal{M}_1), (Y, \mathcal{M}_2), (Z, \mathcal{M}_3)$ ölçülebilir uzaylar $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ ölçülebilir fonksiyonlar ise $g \circ f: X \rightarrow Z$ bileşke fonksiyonu ölçülebilirdir, gösteriniz.

6) Aşağıda verilen şıklarındaki boşlukları doldurunuz.

a) $A \subset \mathbb{R}$ ve $\inf A = t$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.

b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right) = \dots\dots\dots -1 \dots\dots\dots$

c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

d) $\mathbb{R}$ deki tüm (a, b) açık aralıklardan meydana gelen $\mathcal{A}$ ailesi bir σ -cebiri değildir.

e) $A_n = \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \dots\dots\dots \mathbb{Z} \dots\dots\dots$ dır.

Not: 1. ve 5. sorular 15'er puan, 6. sorudaki her şık 2'şer puan olup kalan sorular 20'şer puandır. Süre 110 dakikadır.

Prof. Dr. Birsen Sağır Duyar

$$1) \limsup F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n \cup F_{n+1} \cup \dots) = S \cup T$$

$$\liminf F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} F_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap F_{n+1} \cap \dots) = S \cap T$$

dir. $\limsup F_n \neq \liminf F_n$ olduğundan $\lim F_n$ mevcut değildir.

2) a) $Z \subset Z$, $Z^c = \emptyset$, $\emptyset$ sonlu olduğundan $Z \in \mathcal{M}$ dir.

$A \in \mathcal{M}$ olsun. A sonlu ise, $(A^c)^c = A$ sonlu olacağından $A^c \in \mathcal{M}$ dir.

A sonsuz elemanlı ise, A^c sonlu olacağından $A^c \in \mathcal{M}$ dir.

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ olsun.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ sonlu ise, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sonlu olacağından $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}$ dir.

En az bir i_0 için A_{i_0} sonsuz ise $A_{i_0}^c$ sonludur.

Bu durumda $\bigcup_{i=1}^n A_i$ sonsuz olup $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c \subset A_{i_0}^c$

$A_{i_0}^c$ sonlu olduğundan $A_{i_0}^c \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}$ olur.

Dolayısıyla $\mathcal{M}$ cebiridir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{2n\} \in \mathcal{M}$ fakat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\}$ çift sayılar

kümesi olup kendisi ve tamamlayıcı (tek sayılar) sonlu değildir.

Yarı birleşim $\mathcal{M}$ de değildir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ σ -cebir değildir.

b) $A = \left\{ \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor : 1 \leq x, x \in \mathbb{R} \right\} \in \mathcal{M}$ dir:

$x > 5 \Rightarrow \frac{x}{5} > 1$ olduğunda $\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = 0$

$1 \leq x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 1 > \frac{1}{x} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow 5 > \frac{x}{5} \geq 4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = 4$

$\frac{5}{4} < x \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{4}{5} > \frac{1}{x} \geq \frac{3}{5} \Rightarrow 4 > \frac{x}{5} \geq 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = 3$

$\frac{5}{3} < x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{5} > \frac{1}{x} \geq \frac{2}{5} \Rightarrow 3 > \frac{x}{5} \geq 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = 2$

$\frac{5}{2} < x \leq 5 \Rightarrow \frac{2}{5} > \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow 2 > \frac{x}{5} \geq 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = 1$

$\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \leq \frac{x}{5} < n+1$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ sonlu olur. $\Rightarrow A \in \mathcal{M}$ dir.

③ $M = \{A \subset \mathbb{R}^2 : (u,v) \in A \text{ ise } (-u,-v) \in A\}$

a) $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$ ve $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ için $(-u,-v) \in \mathbb{R}^2$ olduğundan $\mathbb{R}^2 \in M$ dir.

$A \in M$ ise $A^c \in M$ dir:

Herhangi $(u,v) \in A^c$ alalım. $(-u,-v) \in A^c$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $(-u,-v) \in A^c$ olmaydı $(-u,-v) \in A$ olurdu.

$A \in M$ olduğundan $(-(-u), -(-v)) = (u,v) \in A$ olurdu.

$A \cap A^c = \emptyset$ olduğundan bu $(u,v) \in A^c$ olması ile

çelişir. O halde kabul yanlıştır. Yani

$(u,v) \in A^c \Rightarrow (-u,-v) \in A^c$ dir. Yani $A^c \in M$ dir.

• Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in M$ olsun. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in M$ dir:

$(u,v) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olsun. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $(u,v) \in A_{n_0}$ olur.

$A_{n_0} \in M$ olduğundan $(-u,-v) \in A_{n_0}$ dir. $\Rightarrow (-u,-v) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olur.

$\Rightarrow M, \mathbb{R}^2$ üzerinde bir σ -cebiri'dir.

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^4$, f ölçülebilir mi?

$\alpha < 0$ ise; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^4 > \alpha\} = \mathbb{R}^2 \in M$ dir.

($x^2 + y^4 > 0$ olduğundan)

$\alpha \geq 0$ ise; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^4 > \alpha\} \in M$ dir:

$x^2 + y^4 > \alpha$ ise $f(-x,-y) = ((-x)^2 + (-y)^4) = x^2 + y^4 = f(x,y)$

olduğundan $(x,y) \in A$ ise $(-x,-y) \in A$ olacağından

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^4 > \alpha\} \in M$ olur.

$\Rightarrow f$ ölçülebilir dir.

④ Ders notlarında var.

⑤ $A \in M_3$ alalım. $g: Y \rightarrow Z$ ölçülebilir olduğundan $g^{-1}(A) \in M_2$ dir.

$f: X \rightarrow Y$ ölçülebilir olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in M_1$ dir.

$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ olduğundan $(g \circ f)^{-1}(A) \in M_1$ dir.