

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	Toplam

Adı Soyadı:

CEVAP ANAHTARI

06.03.2026

Numara:

MAT 102 ANALİZ II DERSİ KISA SINAV SORULARI

- 1) Türevlenebilme ile süreklilik ilişkisini veren teoremi ifade ediniz. Bu teoremin tersinin doğru olmadığına bir örnek veriniz (30 puan).
- 2) $f(x) = \text{sgn}(x + x^3)$ fonksiyonunun türevini ve türevlenebilir olduğu kümeyi bulunuz (20 puan).

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + 1, & x \geq 0 \\ \ln(x^2 + 1), & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki türevini araştırınız (30 puan).

- 4) Reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar için aşağıda verilen **ilk üç şıkta** boş bırakılan yerlere **Doğru veya Yanlış** yazınız, **diğer iki şıkta** boş bırakılan yerleri **uygun ifadeler ile doldurunuz** (20 puan).
 - a) Bir fonksiyon bir noktada türevlenebilir ise bu fonksiyonun türev fonksiyonu aynı noktada süreklidir. ...**Yanlış**....
 - b) Bir fonksiyonun birinci mertebeden türevi varsa o fonksiyonun her mertebeden türevi vardır.**Yanlış**....
 - c) Bir fonksiyonun bir noktada türevi varsa fonksiyonun grafiğinde o noktadan bir tek teğet doğru geçer. ...**Doğru**....
 - d) Periyodik bir fonksiyonun türev fonksiyonu ...**periyodik...fonksiyondur.**
 - e) Çift bir fonksiyonun türev fonksiyonu**tek...fonksiyondur.**

Not: 4. sorudaki her şık 4 puandır. Süre 60 dakikadır.

1) Teorem : $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

bir fonksiyon olsun. Bu f fonksiyonu $x_0 \in I$ noktasında türemlenebilir
ise x_0 noktasında süreklidir.

Tersinin doğru olmadığına bir örnek verelim.

Örnek: $f(x) = |x|$ fonksiyonunu ve $x_0 = 0$ noktasını alalım

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ olup } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$f(0) = 0 \text{ olup } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 \text{ olduğundan } f, x_0 = 0 \text{ da}$$

süreklidir. Şimdi $x_0 = 0$ da sağ-sol türev baktalım.

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

olup $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ olduğundan $f, x_0 = 0$ noktasında türelenemezdir.

2) sgn fonksiyonunun limiti sıfır yapan noktaları bulalım.

$$x + x^3 = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{olur. Böylece } f(x) = \text{sgn}(x + x^3) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

dur. $x_0 = 0$ noktasında f sürekli midir?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \text{ olup}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ olur. } f, x_0 = 0 \text{ da sürekli değildir. O halde } x_0 = 0 \text{ da}$$

türelenemez. Ayrıca

$$\forall x \in (0, +\infty) \text{ için } f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ ve } \forall x \in (-\infty, 0) \text{ için } f(x) = -1 \Rightarrow f'(x) = 0$$

olup $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $f'(x) = 0$ bulunur f fonksiyonunun türemlenebilir

olduğu bilme $\mathbb{R} - \{0\}$ dir

3) $x_0 = 0$ da f sürekli midir?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 1} + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 + 1) = \ln(1) = 0$$

olup $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ olduğundan $f, x_0 = 0$ da sürekli değildir. O halde f fonksiyonu

$x_0 = 0$ noktasında türelenemezdir