

Adı Soyadı :
No'su :

Ⓐ Grubu

1. $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +, \cdot)$ halkası veriliyor. Tamlik bölgesi midir?

$\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ birim eleman $1 + 0\sqrt{7}$
 $\forall a + b\sqrt{7}, c + d\sqrt{7}$ için $(a + b\sqrt{7})(c + d\sqrt{7}) = ac + ad\sqrt{7} + bc\sqrt{7} + 7bd$
 $= (ac + 7bd) + (ad + bc)\sqrt{7}$
 $= (c + d\sqrt{7}) \cdot (a + b\sqrt{7})$ değişmeli

$(a + b\sqrt{7})(c + d\sqrt{7}) = ac + 7bd + (ad + bc)\sqrt{7} = 0$ olsun

$\left. \begin{array}{l} d/c/ac + 7bd = 0 \\ c - 7d/ad + bc = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} ac^2 - 7ad^2 = 0 \quad a(c^2 - 7d^2) = 0 \quad c^2 - 7d^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0 \text{ tm.} \\ c^2 - 7d^2 \neq 0 \text{ olsun} \quad a = 0 \text{ bulunur} \end{array}$

$7bd^2 - bc^2 = 0 \Rightarrow b(7d^2 - c^2) = 0 \quad b = 0$ olup sıfır bölensiz

0 halde π B dir.

2- a) H değişmeli bir halka J' H'nin bir ideali olsun. $I = \{h \in H \mid ha - ah \in J \ (\forall a \in H \text{ için})\}$ cümlesi H'nin bir ideali midir?

$0 \in H$ için $0a - a \cdot 0 = 0 \in J$ olup $I \neq \emptyset$ dir.

$\forall h_1, h_2 \in I$ için $h_1a - ah_1 \in J$ ve $h_2a - ah_2 \in J$ dir.

$(h_1 - h_2)a - a(h_1 - h_2) = h_1a - h_2a - ah_1 + ah_2 = (h_1a - ah_1) + (ah_2 - ah_2) \in J$
olup $h_1 - h_2 \in I$ bulunur.

$\forall r \in H$ ve $\forall h \in I$ için $ha - ah \in J$ olur.

$(rh)a - a(rh) = r(ha) - r(ah) = r(ha - ah) \in J$ olup
 $rh \in I$ ideal (değişmeli olduğundan $hr \in I$ dir)

b) H bir halka π H'nin sabit bir elemanı olsun.

$H_\pi = \{a \in H \mid \pi a = 0\}$ cümlesi H'nin alt halkası mıdır?

$\pi 0 = 0$ olup $H_\pi \neq \emptyset$

$\forall a, b \in H_\pi$ için $\pi a = \pi b = 0 \Rightarrow \pi(a - b) = \pi a - \pi b = 0$ olup
 $a - b \in H_\pi$ bulunur.

$\forall a, b \in H_\pi$ için $\pi(ab) = (\pi a)b = 0 \cdot b = 0$ olup
 $a \cdot b \in H_\pi$ bulunur. H_π alt halkadır.

Adı Soyadı :
No'su :

(B) Grubu

1-) $(\mathbb{Z}[\sqrt{11}], +, \cdot)$ halkası veriliyor. Tamlik bölgesi midir?

$$\mathbb{Z}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ birim eleman } 1 \neq 0 \cdot \sqrt{11}$$
$$\forall a + b\sqrt{11}, c + d\sqrt{11} \in \mathbb{Z}[\sqrt{11}] \text{ için } (a + b\sqrt{11})(c + d\sqrt{11}) = ac + ad\sqrt{11} + bc\sqrt{11} + 11bd$$
$$= ca + da\sqrt{11} + cb\sqrt{11} + 11db$$
$$= (c + d\sqrt{11})(a + b\sqrt{11}) \text{ dağıtıcı!}$$

$$(a + b\sqrt{11})(c + d\sqrt{11}) = ac + 11bd + (ad + bc)\sqrt{11} = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} d / c / ac + 11bd = 0 \\ c / -11d / ad + bc = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} ac^2 - 11ad^2 = 0 \Rightarrow a(c^2 - 11d^2) = 0 \\ c^2 - 11d^2 \neq 0 \text{ ise } a = 0 \end{array} \quad c^2 - 11d^2 = 0 \Leftrightarrow c = d = 0 \text{ tm}$$

$$11bd^2 - bc^2 = 0 \quad b(11d^2 - c^2) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ olup}$$

sıfır bölensiz 0 halde T.B dir.

2-1 a) H bir halka α H'nin sabit bir elemanı olsun
 $H_\alpha = \{b \in H \mid \alpha b = 0_H\}$ cümlesi H'nin alt halkası mıdır?
A grubu b şıklı

b) H değişmeli bir halka J H'nin bir ideali olsun
 $I = \{h \in H \mid ha - ah \in J \ (\forall a \in H)\}$ cümlesi H'nin bir ideali midir?
A grubu d şıklı