3 Nisan 2020

2019-2020 Eğitim-öğretim yılı, II Dönem

MAT468 FONKSİYONEL ANALİZ

1. QUİZ SINAV SORULARI

1) a) Metrik uzayda bir fonksiyonun sürekliliği ve düzgün sürekliliği tanımlarını yapınız. Aralarındaki ilişkiyi nedenleri ile birlikte açıklayınız. İlgili örnek varsa çözünüz. (15 puan)

b) (X,d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun. $f(x) = d(a,x)$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu sürekli midir? Neden? (20 puan)

2) a) $s, c, c_0, \ell_1, \ell_\infty, \ell_p, B(A,\mathbb{R}), C[a,b], \mathbb{R}^n$ kümelerini tanımlayıp, bu kümeleri metrik uzay yapan d fonksiyonlarını tanımlayınız. (15 puan)

b) (X,m) metrik uzay olsun.

$$d(x,y) = \ln(1 + m(x,y))$$

olmak üzere (X,d) metrik uzay mıdır? Nedenini açıklayınız. (20 puan)

3) (X,d) bir metrik uzay olsun. Hangi durumda her $x \in X$ ve her $r > 0$ için $B(x;r) = X$ dir, açıklayınız. (30 puan)

Not: Başarılar...

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ
1. QUİZ ÇÖZÜMLER

(1) a) $S = \{x = (x_k) : (x_k)$ sınırlı veya sınırlı olmayan tüm diziler$\}$

$x, y \in S$, $d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$, (S,d) metrik uzay

- $c = \{x = (x_k) : |x_k - a| \to 0 \ (k \to \infty), a \in \mathbb{R}\}$
  $d(x,y) = \sup |x_k - y_k|$, $x = (x_k), y = (y_k) \in c$ için
- c_0 ; $a = 0$ hali
- $\ell_\infty = \{x = (x_k) : \sup |x_k| < \infty\}$, $d(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$
- $\ell_1 = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$, $d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|$
- $B(A) = B(A,\mathbb{R}) = \{f \mid f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı$\}$, $d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$
- $\mathbb{R}^n = \{x = (x_n) : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_n \in \mathbb{R}\}$, $d(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$
- $C[a,b] = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli$\}$, $d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

b) (X,m) m.u. olsun. (X,d) metrik uzaydır!

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ dir:

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + m(x,y)) = 0 = \ln 1 \Leftrightarrow 1 + m(x,y) = 1$

$\Leftrightarrow m(x,y) = 0 \overset{m \text{ metrik}}{\Leftrightarrow} x = y$

M2) $m(x,y) = m(y,x)$ old. $d(x,y) = \ln(1 + m(x,y)) = \ln(1 + m(y,x))$
$= d(y,x)$

M3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ dir:

$d(x,z) \le \ln(1 + m(x,z)) \le \ln(1 + m(x,y) + m(y,z))$

$\le \ln(1 + m(x,y) + m(y,z) + \underbrace{m(x,y)\, m(y,z)}_{\ge 0})$

$\le \ln[(1 + m(x,y))(1 + m(y,z))]$

$\overset{\log.\ \text{öz}}{=} \ln(1 + m(x,y)) + \ln(1 + m(y,z)) \Rightarrow$

$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

E) Hiçbiri

③ X kümesi tek noktadan oluşmuş ise $B(x;r) = X$ olur.

① b) (X,d) metrik uzay, $a \in X$ olsun. $f(x) = d(a,x)$

$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x)$ (d metrik, M3 öz.)

$\Rightarrow d(a,x) - d(a,y) \leq d(y,x) = d(x,y) \Rightarrow$

$d(a,x) - d(a,y) \leq d(x,y)$ ... (1)

x ve y nin rolleri değişirse

$d(a,y) - d(a,x) \leq d(x,y) \Rightarrow$

$-d(x,y) \leq d(a,x) - d(a,y)$ ... (2)

(1),(2) den $|d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y)$ bulun.

$\forall \varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \varepsilon$ seçilirse $d(x,y) < \delta$ iken

$|f(x) - f(y)| = |d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y) < \delta$

$\Rightarrow d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

olur ki bu f nin sürekli olması demek

a) Ders notlarında var.