26.03.2026

Adı-Soyadı:

Numara:

MAT 304 FONKSİYONEL ANALİZ DERSİ QUİZ SORULARI

1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0, y\geq 0\}\cup\{(1,1)\}$ kümesi veriliyor. $\mathbb{R}^2$ üzerinde her $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için $d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ile tanımlı d_2 metriğine göre

a) A kümesinin yığılma noktaları kümesini bulunuz. **(20 puan)**
b) A kümesinin kapanışını bulunuz. **(15 puan)**
c) A kümesinin kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz. **(15 puan)**

2) $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x,y)=\ln(1+|x-y|)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre

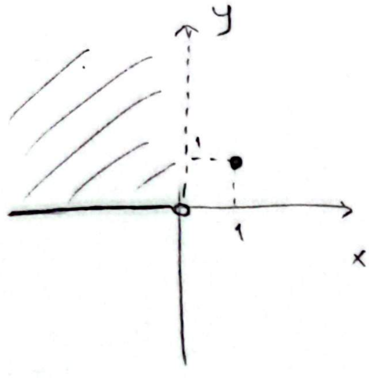
a) d fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz. **(20 puan)**
b) $B_d(0,1)$ açık yuvarını bulunuz. **(15 puan)**
c) $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $d\left(\frac{1}{3},\mathbb{Z}\right)$ uzaklığını bulunuz. **(15 puan)**

Not: Süre 50 dakikadır.

Başarılar...

Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

1)



$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ alalım.

$x\leq 0, y\geq 0$ olsun. O zaman $\forall \varepsilon>0$ için $(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A\neq\emptyset$ olur.

Dolayısıyla $(x,y)\in A'$ dır.

$\mathbb{R}^2$ deki diğer noktaların herbiri için (kümeye ait olan $(1,1)$ noktası dahil)

$$(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A=\emptyset$$

olacak şekilde $\varepsilon>0$ bulunur. Dolayısıyla $A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 0, y\geq 0\}$ dır. $\bar{A}=A\cup A'$ olduğundan $\bar{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 0, y\geq 0\}\cup\{(1,1)\}$ dır. $\bar{A}\neq A$ olduğundan A kapalı küme değildir.

2) $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x,y)=\ln(1+|x-y|)$

a) i) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ için $d(x,y)=\ln(\underbrace{1+|x-y|}_{\geq 1})\geq 0$ dır.

ii) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \ln(1+|x-y|)=0 \Leftrightarrow 1+|x-y|=1$

$\Leftrightarrow |x-y|=0$

$\Leftrightarrow x=y$

iii) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ için

$$d(x,y)=\ln(1+|x-y|)=\ln(1+|y-x|)=d(y,x)$$

dır

iv) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
d(x,y)=\ln(1+|x-y|) &\leq \ln(1+|x-z|+|z-y|)\\
&\leq \ln(1+|x-z|+|z-y|+|x-z|.|z-y|)\\
&=\ln((1+|x-z|)(1+|z-y|))\\
&=\ln(1+|x-z|)+\ln(1+|z-y|)\\
&=d(x,z)+d(z,y)
\end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla d, $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

b) $B_d(0,1)=\{x\in\mathbb{R}: d(0,x)<1\}=\{x\in\mathbb{R}: \ln(1+|x|)<1\}$

$\ln(1+|x|)<1 \Rightarrow 1+|x|<e \Rightarrow |x|<e-1 \Rightarrow 1-e<x<e-1$

$B_d(0,1)=(1-e,e-1)$

c) $d(\frac{1}{3},\mathbb{Z})=\inf\{d(\frac{1}{3},x): x\in\mathbb{Z}\}=\inf\{\ln(1+|\frac{1}{3}-x|) : x\in\mathbb{Z}\}$

$=\ln\frac{4}{3}$ $\quad$ ($x=0$ için)

CamScanner ile tarandı