

Ad-Soyad:

13.05.2024

Numara:

Lineer Cebir II Kısa Sınav Soruları

NOT: Sorularda belirtilen yöntemlerden başka yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Çözümlerinizi ayrıntılı yazınız. Süre 60 dakikadır. Başarılar.

1) Lineer dönüşüm tanımını yapınız. (20 p)

2)  $L: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^8$  lineer dönüşümü verilsin.

a)  $\text{rank}L = 2$  ise  $\text{boy}(\text{çek}L)$  değerini bulunuz. (10 p)

b)  $\text{çek}L = 0$  ise  $L$  lineer dönüşümü örten midir? Açıklayınız. (10 p)

c)  $\text{çek}L = 4$  ise  $\text{boy}(L(\mathbb{R}^5))$  değerini bulunuz. (10 p)

$$\rightarrow (x, y, z) \rightarrow A(x, y, z) = (x+y, x-2y+z, x-y+z)$$

3)  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineer dönüşümü verilsin.  $\psi = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\mathbb{R}^3$  (tanım kümesinin) standart bazı olsun.  $\phi = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, -1, -1)\}$  ise  $\mathbb{R}^3$  (değer kümesinin) bir bazı olsun. O halde,  $\psi$  ve  $\phi$  bazlarına göre  $A$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz (20 p).

4)  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $L(a, b) = (a+b, b, a-b)$  lineer dönüşümü verilsin.

a)  $(1, -1) \in \text{Çek}L$  midir? (5 p)

b)  $(3, 1, 1) \in L(\mathbb{R}^2)$  midir? (5 p)

c)  $L$  lineer dönüşümünün çekirdek uzayının bir bazını bulunuz. (5 p)

d)  $L$  lineer dönüşümünün görüntü uzayının bir bazını bulunuz. (5 p)

e)  $\text{Çek}L$  ve  $L(\mathbb{R}^2)$  uzaylarının boyutlarını bulunuz. (10 p)

## Lineer Cebir II Kısa Sınav Cevap Anahtarı

Soru 1)  $U$  ve  $V$  aynı  $\mathcal{F}$  cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı ve  $L: U \rightarrow V$  bir dönüşüm olsun.  $L$  dönüşümü  $\alpha, \beta \in U$  ve  $c \in \mathcal{F}$  ü

$$i) L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$$

$$ii) L(c\alpha) = cL(\alpha)$$

Özelliklerini sağlıyorsa  $L$ 'ye  $U$ 'den  $V$ 'ye lineer dönüşüm denir

Soru 2)  $L: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^8$

Boyut teoremi:  $\underbrace{\text{rank } L}_{\text{boy}(L(\mathbb{R}^5))} + \underbrace{\text{sıfırlık } L}_{\text{boy}(\text{Gek } L)} = \text{boy}(\mathbb{R}^5)$

a)  $\text{rank } L = 2$  ise  $\underbrace{\text{rank } L}_2 + \underbrace{\text{sıfırlık } L}_5 = \underbrace{\text{boy}(\mathbb{R}^5)}_5 \Rightarrow \boxed{\text{sıfırlık } L = \text{boy}(\text{Gek } L) = 3}$

c)  $\text{Gek } L = 4$  ise

$$\underbrace{\text{rank } L}_{\text{boy}(L(\mathbb{R}^5))} + \underbrace{\text{sıfırlık } L}_4 = \underbrace{\text{boy}(\mathbb{R}^5)}_5 \Rightarrow \boxed{\text{boy}(L(\mathbb{R}^5)) = 1}$$

b)  $L$  örten ise  $\Leftrightarrow \text{boy}(\mathbb{R}^8) = \text{rank } L$

$\text{Gek } L = 0$  ise  $\underbrace{\text{rank } L}_0 + \underbrace{\text{sıfırlık } L}_5 = \underbrace{\text{boy}(\mathbb{R}^5)}_5 \Rightarrow \text{rank } L = 5$

$$\underbrace{\text{boy}(\mathbb{R}^8)}_8 \neq \underbrace{\text{rank } L}_5 \text{ olduğunda}$$

$L$  örten değildir.

Soru 3:  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x,y,z) \rightarrow A(x,y,z) = (x+y, x-2y+2, x-y+2)$   
 $\psi = \{e_1, e_2, e_3\}$   
 $(1,0,0) \rightarrow (0,1,0) \rightarrow (0,0,1)$   
 $\phi = (1,1,0), (0,1,0), (0,-1,-1)$

$$A(1,0,0) = (1,1,1)$$

$$A(0,1,0) = (1,-2,-1)$$

$$A(0,0,1) = (0,1,1)$$

$$\underbrace{A(1,0,0)}_{(1,1,1)} = a \cdot (1,1,0) + b \cdot (0,1,0) + c \cdot (0,-1,-1)$$

$$\boxed{a=1}$$

$$a+b-c=1$$

$$-c=1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

$$1+b+1=1$$

$$\boxed{b=-1}$$

$$A(0,1,0) = (1,-2,-1) = a \cdot (1,1,0) + b \cdot (0,1,0) + c \cdot (0,-1,-1)$$

$$\boxed{1=a}$$

$$a+b-c=-2$$

$$-c=-1 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

$$1+b-1=-2$$

$$\boxed{b=-2}$$

$$A(0,0,1) = (0,1,1) = a \cdot (1,1,0) + b \cdot (0,1,0) + c \cdot (0,-1,-1)$$

$$\boxed{a=0}$$

$$a+b-c=1$$

$$-c=1 \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

$$\Rightarrow b+1=1$$

$$\boxed{b=0}$$

$$M_{\psi\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \#$$

Soru 4:  $L(a,b) = (a+b, b, a-b)$

a)  $\text{Ker} L = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid L(a,b) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \}$

$$(a+b, b, a-b) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ker} L = \{ (0,0) \}$$

$$(1, -1) \neq (0,0) \Rightarrow (1, -1) \notin \text{Ker} L$$

b)  $L(a,b) = (a+b, b, a-b) = (3, 1, 1)$

$$\begin{aligned} a+b &= 3 \\ b &= 1 \end{aligned} \quad \boxed{a=2}$$

$$\begin{aligned} a-b &= 1 \\ \downarrow \\ 2-1 &= 1 \\ a=2 \\ b=1 \end{aligned} \quad \text{igün}$$

olup  $(3, 1, 1) \in L(\mathbb{R}^2)$  dir.

c)  $\text{Ker} L = \{ (0,0) \}$

$(0,0)$  linear bağımsız olup  $\text{Ker} L$  nin bir bazı  $\{ \}$  dir.

Yani boş eleman yoktur.

d)  $L(\mathbb{R}^2) = (a+b, b, a-b) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, -1)$

$$L(\mathbb{R}^2) = \text{sp} \{ (1, 0, 1), (1, 1, -1) \} \quad \text{olduğundan germe sağlar}$$

Linear bağımsız mı?

$$c_1(1, 0, 1) + c_2(1, 1, -1) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} c_1 &= 0 \text{ old} \\ \text{linear} &\text{ bağımsız} \end{aligned}$$

Ortalda  $L(\mathbb{R}^2)$  uzayının bir bazı  $\{ (1, 0, 1), (1, 1, -1) \}$  dir

e)  $\text{boy}(\text{Ker} L) = 0$

$$\text{boy}(L(\mathbb{R}^2)) = 2 \quad \#$$