Ad-Soyad :
Numara :

Öklidyen Olmayan Geometri Kısa Sınav Cevap Anahtarı   31.03.2026

NOT: Her soru 20 puan olup süre 45 dakikadır. Başarılar dilerim.

1) Öklid'in paralellik postulatını ifade ediniz.
2) Öklidyen olmayan geometrilerin ortaya çıkış süreci hakkında bilgi veriniz.
3) Birbirinden farklı Ω_l ve Ω_m yansımalarının değişmeli olması için gerek ve yeter şart $l \perp m$ olmasıdır, gösteriniz.
4) S^2 de doğru tanımını yapınız.
5) S^2 de kutbu $h=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ olan m doğrusu ile kutbu $k=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olan n doğrusunun arakesitini bulunuz.

Cevaplar

1) Başka iki doğruyu kesen bir doğru, bu iki doğru ile aynı tarafta toplamları iki dik açıdan küçük açılar oluşturursa iki doğru bu açıların bulunduğu tarafta kesişirler.
Veya
Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilebilir.

2) Öklid'in paralellik postulatı 19. yüzyıla kadar matematikçileri meşgul eden bir uğraşı olmuştur. Önceleri bu postulatın diğer postulatlar tarafından elde edilebileceği düşüncesi hakim olmuştur ve matematikçiler bu postulatı ispat etmeye çalışmıştır. Yapılan çalışmalarda farkında olmadan bu postulata denk ifadeler kullanıldığı için bu postulatı ispatlama girişimleri başarısız olmuştur. Sonraları paralellik postulatı "bir doğruya dışındaki bir noktadan paralel çizilemez." veya "bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel çizilebilir." postulatları ile değiştirilerek Öklid dışı geometriler ortaya çıkmıştır.

3) v ve w birim vektörler olmak üzere $\ell = P + [v]$ ve $m = Q + [w]$ doğrularını ele alalım. $\Omega_\ell \neq \Omega_m$ olduğunu kabul edelim. $\Omega_\ell \Omega_m = \Omega_m \Omega_\ell$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall X \in E^2$ alalım.

$$\Omega_m X = X - 2\langle X - Q, w^\perp \rangle w^\perp$$

olduğunu biliyoruz. $Y = \Omega_m X$ olsun.

$$\Omega_\ell \Omega_m X = \Omega_\ell Y = Y - 2\langle Y - P, v^\perp \rangle v^\perp$$

$$= X - 2\langle X - Q, w^\perp \rangle w^\perp - 2\langle X - 2\langle X - Q, w^\perp \rangle w^\perp - P, v^\perp \rangle v^\perp$$

$$= X - 2\langle X - Q, w^\perp \rangle w^\perp - 2\langle X - P, v^\perp \rangle v^\perp + 4\langle X - Q, w^\perp \rangle \langle w^\perp, v^\perp \rangle v^\perp$$

Bu eşitlikte $v^\perp$ ile $w^\perp$ in ve P ile Q nun rolleri değiştirilirse

$$\Omega_m \Omega_\ell X = X - 2\langle X - P, v^\perp \rangle v^\perp - 2\langle X - Q, w^\perp \rangle w^\perp + 4\langle X - P, v^\perp \rangle \langle v^\perp, w^\perp \rangle w^\perp$$

olarak bulunur. Bu iki eşitlik karşılaştırılırsa

$$\Omega_\ell \Omega_m X = \Omega_m \Omega_\ell X \Leftrightarrow \langle v^\perp, w^\perp \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow v \perp w \Leftrightarrow \ell \perp m$$

olduğu görülür. Bu ifade $\forall X \in E^2$ için doğru olup $\Omega_m \Omega_\ell = \Omega_\ell \Omega_m \Leftrightarrow \ell \perp m$ elde edilir.

4) $h \in S^2$ olsun. $\ell = \{x \in S^2 \mid \langle x, h \rangle = 0\}$ kümesine S^2 de h kutuplu doğru denir.

5) $P \in m \cap n \Leftrightarrow \langle P, h \rangle = 0,\ \langle P, k \rangle = 0 \Leftrightarrow P = \mp \dfrac{h \times k}{|h \times k|}$

$$h \times k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$|h \times k| = \sqrt{\frac{6}{36} + \frac{6}{36}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow P = \mp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$