Adı Soyadı:
Numarası:

28.03.2024

CEBİR II QUİZ SORULARI

1) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halkası veriliyor. Bu halka Tamlık Bölgesi olur mu? Araştırınız.

a) Halka birimlidir $e = 1 + 0\sqrt{7}$

b) Halka değişmelidir. $\forall\, a+b\sqrt{7},\ c+d\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ için

$(a+b\sqrt{7})(c+d\sqrt{7}) = ac + 7bd + \sqrt{7}(ad+bc) = (c+d\sqrt{7})(a+b\sqrt{7})$

c) Sıfır bölensizdir. $a+b\sqrt{7},\ c+d\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ alalım

$(a+b\sqrt{7})(c+d\sqrt{7}) = 0 \Rightarrow ac + 7bd = 0 \wedge ad + bc = 0$

$d/\ -c/\ ac + 7bd = 0$
$-/\ 7d/\ ad + bc = 0$ $\Big\}\ -ac^2 + 7ad^2 = 0 \Rightarrow a(7d^2 - c^2) = 0 \quad 7d^2 - c^2 \neq 0$

$a = 0$

$-7bd^2 + bc^2 = 0 \quad b(c^2 - 7d^2) = 0 \quad -7d^2 + c^2 \neq 0$

$b = 0$

o halde $a + b\sqrt{7} = 0$ sıfır bölensiz.

T.B dır.

2) a) R bir halka olmak üzere her $a, b \in R$ için $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eşitliği veriliyor. Bu durumda R halkası değişmeli olur mu? Araştırınız.

$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow$

$\cancel{ab} + ba = 2ab = \cancel{ab} + ab$

$ba = ab$, ($\forall a, b \in \mathbb{R}$ için)

b) $M_2[\mathbb{Z}] = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$, $2x2$ tipinde matrisler halkası veriliyor. $K = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $M_2[\mathbb{Z}]$ halkasının alt halkası olur mu? Araştırınız.

$K \neq \emptyset$ Açık.

1) $\forall \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in K$ için $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$

olup K'nın elemanıdır.

2) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \in K$

olup K, $M_2[\mathbb{Z}]$ nın althalkasıdır.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

CamScanner ile tarandı